МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное бюджетное государственное образовательное учреждение высшего образования

Донской государственный технический университет

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Курс лекций

Составитель: зав. кафедрой высшей математики, д.ф.-м.н., профессор Павлов И.В.

Рецензенты: к.ф.-м.н., доцент А.М. Можаев, к.ф.-м.н., доцент Г.А. Власков

Ростов-на-Дону

2022

ЧАСТЬ 1: МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Лекция 1

<u>*Определение 1.*</u> Квадратной матрицей порядка *n* называется прямоугольная таблица, состоящая из n^2 чисел и имеющая вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

□

В элементе a_{ij} матрицы *A* индекс *i* (соответственно, индекс *j*) обозначает номер строки (соответственно, номер колонны), в которой находится этот элемент.

<u>*Числовая иллюстрация.*</u> Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 8 & 10 \\ -2 & 4 & 6 & 11 \\ -10 & -8 & -3 & 2 \\ -4 & 3 & 12 & 17 \end{pmatrix}.$$

Здесь *n*=4; к примеру, $a_{11} = 3,\ a_{13} = 8,\ a_{24} = 11,\ a_{43} = 12.$ Если из этой матрицы удалить первую строку и третью колонну, то получим следующую матрицу 3-го порядка:

$$A_{13} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 11 \\ -10 & -8 & 2 \\ -4 & 3 & 17 \end{pmatrix}.$$

□

<u>*Определение 2.*</u> 1) Определителем |*A*| матрицы *A* первого порядка называется единственный элемент, из которого эта матрица состоит, т.е. для $A = (a_{11})$ $|A| = a_{11}$.

2) Определителем матрицы *A* порядка $n > 1$ называется число

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{1k} \cdot |A_{1k}|, \tag{2}$$

где матрица A_{1k} порядка $n-1$ получается из матрицы *A* уничтожением первой строки и *k*-й колонны.

□

<u>*Пример1.*</u> Пусть $n = 2$, т.е.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Согласно определению 2,

$$|A| = \sum_{k=1}^{2} (-1)^{k+1} a_{1k} \cdot |A_{1k}| = (-1)^2 a_{11} \cdot |A_{11}| + (-1)^3 a_{12} \cdot |A_{12}| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

т.к. $A_{11} = (a_{22}),\ A_{12} = (a_{21})$ – матрицы первого порядка. Таким образом, получаем вычислительную формулу:

$$\boxed{|A| := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{3}$$

□

<u>*Числовая иллюстрация.*</u> Пусть

$$A=\begin{pmatrix}4 & 3\\ -2 & 5\end{pmatrix}.$$

Тогда $|A|=4\cdot 5-3\cdot(-2)=20+6=26.$

□

<u>*Пример 2.*</u> Пусть $n=3$, т.е.

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}.$$

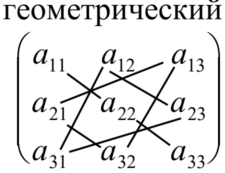
Согласно определению 2,

$$|A|=\sum_{k=1}^{3}(-1)^{k+1}a_{1k}\cdot|A_{1k}|=a_{11}\cdot|A_{11}|-a_{12}\cdot|A_{12}|+a_{13}\cdot|A_{13}|=$$

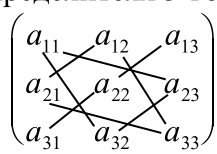
$$=a_{11}\cdot\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\cdot\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\cdot\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}=a_{11}\cdot(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}\cdot(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+$$

$$+a_{13}\cdot(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Отсюда получаем геометрический способ вычисления определителя 3-го порядка:



Соединенные отрезками элементы перемножаются и берутся со знаком +.



Соединенные отрезками элементы перемножаются и берутся со знаком –.

Однако на практике чаще всего применяется следующая вычислительная формула:

$$\boxed{|A|=a_{11}\cdot\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\cdot\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\cdot\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}}. \tag{4}$$

□

<u>*Числовая иллюстрация.*</u> Пусть

$$A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 4\\ 5 & 6 & 7\\ -1 & 4 & 8\end{pmatrix}.$$

Тогда $|A|=2\cdot\begin{vmatrix}6 & 7\\ 4 & 8\end{vmatrix}-(-3)\cdot\begin{vmatrix}5 & 7\\ -1 & 8\end{vmatrix}+4\cdot\begin{vmatrix}5 & 6\\ -1 & 4\end{vmatrix}=2\cdot 20+3\cdot 47+4\cdot 26=285.$

□

<u>*Пример 3.*</u> Рассмотрим матрицу *n*-го порядка, у которой главная (т.е. наклоненная влево) диагональ состоит из единиц, а все остальные элементы которой равны нулю:

$$A=I_n=\begin{pmatrix}1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 1 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & 1\end{pmatrix}.$$

Такая матрица называется единичной. Имеем по формуле (2):

$$|A|=|I_n|=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_{1k}\cdot|A_{1k}|=a_{11}\cdot|A_{11}|=|I_{n-1}|.$$

Следовательно, $|I_n|=|I_{n-1}|=|I_{n-2}|=\ldots=|I_1|$. Но $|I_1|=1$. Таким образом, $|I_n|=1$. То есть, определитель единичной матрицы любого порядка равен единице.

□

Заметим, что формулу (2), а также ее частные случаи (3) и (4), называют разложением определителя по первой строке.

<u>*Лемма 1.*</u> Для любой матрицы *A* вида (1) справедлива формула:

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \cdot |A_{i1}|, \tag{5}$$

выражающая собой разложение определителя по первой колонне.

<u>*Доказательство.*</u> Доказательство проводится по индукции. Мы воспроизведем лишь три ее первых шага. Переход от $n-1$ к n осуществляется аналогично, но его техническое оформление достаточно сложное.

При $n=1$ формула (5) дает: $|A| = a_{11}$, что совпадает с определением 2.

При $n=2$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Используя формулу (3), имеем:

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = a_{11} \cdot |A_{11}| - a_{21} \cdot |A_{21}| = \sum_{i=1}^{2} (-1)^{i+1} a_{i1} \cdot |A_{i1}|,$$

что совпадает с формулой (5).

При $n=3$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Используя геометрический способ вычисления определителя 3-го порядка (см. пример 2), получаем:

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} = a_{11} \cdot \left(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}\right) -$$

$$- a_{21} \cdot \left(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}\right) + a_{31} \cdot \left(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}\right) = a_{11} \cdot |A_{11}| - a_{21} \cdot |A_{21}| + a_{31} \cdot |A_{31}| = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+1} a_{i1} \cdot |A_{i1}|,$$

что совпадает с формулой (5).

$\square$

<u>*Числовая иллюстрация.*</u> Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 0 & 3 & 11 \\ 0 & 17 & 2 \end{pmatrix}.$$

Подсчет определителя данной матрицы разумнее вести разложением по первой колонне, так как в ней содержится много нулей. Имеем:

$$|A| = 5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 17 & 2 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 17 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} = 5 \cdot (6 - 187) = -905.$$

$\square$

<u>*Определение3.*</u> Поставим в соответствие матрице *A*, заданной формулой (1), матрицу A^T, чьи колонны совпадают с соответствующими строками матрицы *A*. Матрица A^T называется транспонированной матрицей (по отношению к *A*).

$\square$

<u>*Числовая иллюстрация.*</u>

Если $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -8 \\ 1 & 9 & -2 \\ 4 & 7 & 10 \end{pmatrix}$, то $A^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -5 & 9 & 7 \\ -8 & -2 & 10 \end{pmatrix}$.

$\square$

Можно сказать, что A^T получается вращением матрицы *A* вокруг ее главной диагонали. Обозначать матрицу A^T мы будем следующим образом:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11}^T & a_{12}^T & \dots & a_{1n}^T \\ a_{21}^T & a_{22}^T & \dots & a_{2n}^T \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}^T & a_{n2}^T & \dots & a_{nn}^T \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Очевидно, что $a_{ij}^T = a_{ji}$.

Наряду с матрицей *A* порядка *n* рассмотрим матрицы $\left(A^T\right)_{ji}$ и $\left(A_{ij}\right)^T$ порядка $n-1$. Матрица $\left(A^T\right)_{ji}$ получается транспонированием матрицы *A*, а затем удалением из полученной матрицы *j*-й строки и *i*-й колонны. Для конструирования матрицы $\left(A_{ij}\right)^T$ нужно сначала удалить из *A* *i*-ю строку и *j*-ю колонну, а затем транспонировать полученную матрицу.

Лемма 2. $\left(A^T\right)_{ji} = \left(A_{ij}\right)^T$.

Доказательство. Запишем матрицу *A* в виде:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i1} & \dots & a_{i,j-1} & a_{ij} & a_{i,j+1} & \dots & a_{in} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(A_{ij}\right)^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{i-1,1} & a_{i+1,1} & \dots & a_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1,j-1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i+1,j-1} & \dots & a_{n,j-1} \\ a_{1,j+1} & \dots & a_{i-1,j+1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{n,j+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & a_{j-1,n} & a_{i+1,n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Аналогично,

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{i-1,1} & a_{i1} & a_{i+1,1} & \dots & a_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1,j-1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i,j-1} & a_{i+1,j-1} & \dots & a_{n,j-1} \\ a_{1j} & \dots & a_{i-1,j} & a_{ij} & a_{i+1,j} & \dots & a_{nj} \\ a_{1,j+1} & \dots & a_{i-1,j+1} & a_{i,j+1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{n,j+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & a_{i-1,n} & a_{in} & a_{i+1,n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left(A^T\right)_{ji} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{i-1,1} & a_{i+1,1} & \dots & a_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1,j-1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i+1,j-1} & \dots & a_{n,j-1} \\ a_{1,j+1} & \dots & a_{i-1,j+1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{n,j+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & a_{j-1,n} & a_{i+1,n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$. Лемма доказана. □

ЧАСТЬ 1: МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Лекция 2

Свойства определителей

1. Определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной матрицы, т.е.

$$\left|A^T\right| = |A|. \qquad (7)$$

Доказательство. Доказательство проводится с помощью метода математической индукции. При $n=1$ данное свойство очевидно, так как $A^T = A = \left(a_{11}\right)$. Предположим, что равенство (7) выполняется для матриц $(n-1)$-го порядка и докажем, что оно выполняется для матриц n-го порядка.

Разложим определитель $\left|A^T\right|$ по первой колонне (см. лемму 1), а затем применим лемму 2 и предположение индукции:

$$\left|A^T\right| = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1} a_{i1}^T \cdot \left|\left(A^T\right)_{i1}\right| = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1} a_{1i} \cdot \left|\left(A_{1i}\right)^T\right| = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1} a_{1i} \cdot \left|A_{1i}\right| = |A|.$$

Последнее равенство – это разложение определителя по первой строке (см. определение 2).

□

Из доказанного соотношения вытекает, что все свойства, касающиеся строк определителя, остаются справедливыми и для его колонн.

Числовая иллюстрация. Разложим оба следующих определителя по первой строке:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -5 & -8 \\ 1 & 9 & -2 \\ 4 & 7 & 10 \end{vmatrix} = 3\cdot 104 + 5\cdot 18 - 8\cdot(-29) = 634;$$

$$\left|A^T\right| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -5 & 9 & 7 \\ -8 & -2 & 10 \end{vmatrix} = 3\cdot 104 - 1\cdot 6 + 4\cdot 82 = 634.$$

□

2. Если поменять местами две строки определителя, то определитель меняет знак на противоположный.

Доказательство. Доказательство проводится по индукции.

Рассмотрим сначала случай $n=2$. Имеем:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$$

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{21}a_{12} - a_{22}a_{11} = -\left(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\right) = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Докажем теперь это свойство для $n=3$, когда меняются местами первая и вторая строки. Определители будем раскладывать по первой колонне. Имеем:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\cdot\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\cdot\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}\cdot\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} = a_{21}\cdot\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} -$$

$$-a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{31}\cdot\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = -\left(a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\cdot\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\cdot\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}\right) =$$

$$= -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Случай $n = 2$ мы использовали здесь, заменив $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$ на $-\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$.

Доказательство общего случая использует ту же самую идею и мы его опускаем.

□

<u>*Числовая иллюстрация.*</u> Вычислим определитель:

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & -8 \\ 1 & 3 & -2 \\ 4 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot 23 + 5\cdot 11 - 8\cdot(-5) = 164.$$

Поменяв местами первую и третью строки определителя, вычислим его:

$$\begin{vmatrix} 4 & 7 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & -5 & -8 \end{vmatrix} = 4\cdot(-34) - 7\cdot(-2) + 3\cdot(-14) = -164.$$

□

3. Если две какие-либо строки определителя совпадают, то этот определитель равен нулю.

<u>*Доказательство.*</u> Пусть в квадратной матрице A две строки совпадают. Поменяем местами эти две строки и полученную матрицу обозначим B. Ясно, что $A=B$, то есть $|A|=|B|$. С другой стороны, по свойству 2 $|B| = -|A|$. Таким образом, $|A| = -|A|$, то есть $|A|=0$.

□

<u>*Числовая иллюстрация.*</u>

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & -8 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot(-14) - 2\cdot 17 - 3\cdot(-16) = 0.$$

□

4. Если какая либо одна строка определителя умножена на постоянный множитель α, то этот множитель можно вынести за знак определителя, то есть:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1j} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & \dots & \dots & a_{i-1,j} & \dots & \dots & a_{i-1,n} \\ \alpha\cdot a_{i1} & \dots & \dots & \alpha\cdot a_{ij} & \dots & \dots & \alpha\cdot a_{in} \\ a_{i+1,1} & \dots & \dots & a_{i+1,j} & \dots & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nj} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \alpha\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1j} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & \dots & \dots & a_{i-1,j} & \dots & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i1} & \dots & \dots & a_{ij} & \dots & \dots & a_{in} \\ a_{i+1,1} & \dots & \dots & a_{i+1,j} & \dots & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nj} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

<u>*Доказательство.*</u> Проведем доказательство для случая $i=1$. По определению 2 имеем:

$$\begin{vmatrix} \alpha\cdot a_{11} & \alpha\cdot a_{12} & \dots & \alpha\cdot a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\alpha\cdot a_{1k}\cdot|A_{1k}| = \alpha\cdot\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_{1k}\cdot|A_{1k}| =$$

$$=\alpha\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Для доказательства общего случая нужно поменять местами первую и i-ю строки определителя, воспользоваться доказанным выше и снова поменять местами первую и i-ю строки.

□

<u>*Числовая иллюстрация.*</u>

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 21 & -42 & 63 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 21\cdot 1 & 21\cdot(-2) & 21\cdot 3 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 21\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 21\cdot\big(2\cdot(-8)+1\cdot(-11)+1\cdot 10\big) = -357.$$

□

5. Справедливо равенство:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \dots & \dots & b_{in}+c_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & \dots & b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & \dots & c_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

<u>*Доказательство.*</u> Сначала следует рассмотреть случай i=1, а затем общий случай свести к рассмотренному, руководствуясь рассуждениями, данными в конце доказательства свойства 4.

□

<u>*Числовая иллюстрация.*</u>

$$\begin{vmatrix} 12 & 1 & 2 \\ 7 & 3 & 5 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7+5 & 3-2 & 5-3 \\ 7 & 3 & 5 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 5 \\ 7 & 3 & 5 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & -2 & -3 \\ 7 & 3 & 5 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix}.$$

Так как в полученных определителях есть одинаковые строки, то согласно свойству 3 они равны нулю. Значит и исходный определитель равен нулю.

□

6. Если какая-то строка определителя представляет собой линейную комбинацию других строк этого определителя, то данный определитель равен нулю.

<u>*Доказательство.*</u> Применив к данному определителю свойства 5 и 4, придем к линейной комбинации определителей, содержащих одинаковые строки. По свойству 3 такие определители равны нулю, значит и исходный определитель равен нулю.

□

<u>*Числовая иллюстрация.*</u>

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \\ 8 & 11 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \\ 2\cdot 1+3\cdot 2 & 2\cdot(-2)+3\cdot 5 & 2\cdot 3+3\cdot(-4) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \\ 2\cdot 1 & 2\cdot(-2) & 2\cdot 3 \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3\cdot 2 & 3\cdot 5 & 3\cdot(-4) \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \\ 2 & 5 & -4 \end{vmatrix} = 2\cdot 0 + 3\cdot 0 = 0.$$

□

7. Определитель не изменится, если к элементам одной его строки прибавить соответствующие элементы другой его строки, умноженные на константу.

Доказательство. Точно так же, как для свойства 6, доказательство следует из свойств 5, 4 и 3.

□

Числовая иллюстрация.

Пусть $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 3 & -1 & 8 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$. Прибавим к первой строке этого определителя вторую строку, умноженную на 2. Получим:

$$\begin{vmatrix} 2+2\cdot 3 & -3+2\cdot(-1) & 7+2\cdot 8 \\ 3 & -1 & 8 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 3 & -1 & 8 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2\cdot 3 & 2\cdot(-1) & 2\cdot 8 \\ 3 & -1 & 8 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= \Delta + 2\cdot\begin{vmatrix} 3 & -1 & 8 \\ 3 & -1 & 8 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \Delta + 2\cdot 0 = \Delta.$$

□

8. Определитель равен нулю, если все элементы какой-либо его строки равны нулю.

Доказательство. Это свойство очевидно и его доказательство предоставляется читателю.

□

Числовая иллюстрация.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 7 & -8 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 7 & -8 & 5 \end{vmatrix} = -\left(0\cdot\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -8 & 5 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 7 & -8 \end{vmatrix}\right) = 0.$$

□

9. Пусть A и B – две матрицы n-го порядка. Тогда определитель произведения этих матриц равен произведению их определителей, т.е.

$$|A\cdot B| = |A|\cdot|B|.$$

Доказательство. Мы докажем это свойство только для случая n=2. Если $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, а $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, то произведение $A\cdot B$ определяется следующим образом:

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

,

то есть строки матрицы A умножаются скалярно на столбцы матрицы B. Имеем:

$$|A\cdot B| = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) - (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})(a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}) = a_{11}a_{21}b_{11}b_{12} +$$

$$+ a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} + a_{12}a_{21}b_{21}b_{12} + a_{12}a_{22}b_{21}b_{22} - a_{11}a_{21}b_{12}b_{11} - a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} - a_{12}a_{21}b_{22}b_{11} - a_{12}a_{22}b_{22}b_{21} =$$

$$= a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} + a_{12}a_{21}b_{21}b_{12} - a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} - a_{12}a_{21}b_{22}b_{11} = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) = |A|\cdot|B|.$$

□

ЧАСТЬ 1: МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Лекция 3

Теперь мы в состоянии доказать, что всякий определитель может быть разложен по любой строке и по любой колонне.

Теорема 1. Справедливы формулы:

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{ik} \cdot |A_{ik}| \tag{8}$$

(разложение определителя по i-й строке) и

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \cdot |A_{kj}| \tag{9}$$

(разложение определителя по j-й колонне).

Доказательство. Докажем по индукции формулу (8). При i=1 эта формула совпадает с формулой (2). Рассмотрим случай i=2. Поменяв местами первую и вторую строки в определителе матрицы A, получим:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Легко видеть, что если в последнем определителе удалить первую строку и k-й столбец, то получится определитель $|A_{2k}|$, то есть определитель, получающийся из исходного определителя удалением второй строки и k-го столбца. Таким образом, разложив последний определитель по первой строке, получаем:

$$|A| = -\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{2k} \cdot |A_{2k}| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+2} a_{2k} \cdot |A_{2k}|,$$

что доказывает формулу (8) при i=2.

Точно так же доказывается переход от i–1 к i.

□

Пример 4. Вычислим определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}.$$

Прибавим к первой колонне вторую колонну, затем третью, четвертую и пятую. Свойство 7 определителей, примененное к колоннам, показывает, что определитель при этом не меняется. Поэтому

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

в силу свойства 8, также примененного к колоннам. □

Пример 5. Вычислим определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}.$$

Прибавим вторую колонну к третьей (свойство 7), а затем вынесем общий множитель $a+b+c$ за знак определителя (свойство 4). Получим:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & a+b+c \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix} = (a+b+c)\cdot \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Последнее соотношение следует из свойства 3, так как мы получили совпадение первой и третьей колонны.

□

<u>*Пример 6.*</u> Покажем, что если матрица *A* антисимметрична (то есть $A^T = -A$; относительно матрицы –*A* см. определение 7) и имеет <u>нечетный</u> порядок *n*, то |*A*|=0.

Действительно, применяя свойство 4 последовательно ко всем *n* строкам, получаем:

$$\left|A^T\right| = |-A| = \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & -a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^n |A| = -|A|.$$

Но так как в силу свойства 1 $\left|A^T\right| = |A|$, то получаем $|A| = -|A|$, откуда |*A*|=0.

أ

Заметим, что если антисимметричная матрица *A* имеет <u>четный</u> порядок, то ее определитель не обязан равняться нулю. Например, если $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, то $A^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -A$, 0днако |*A*|=1.

Действия над матрицами

Прежде всего обобщим определение 1.

<u>*Определение 4.*</u> Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из *m* строк и *n* колонн:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (10)$$

□

В дальнейшем для краткости мы будем обозначать матрицы так: $A = \left(a_{ij}\right)$.

<u>*Определение 5.*</u> Две матрицы $A = \left(a_{ij}\right)$ и $B = \left(b_{ij}\right)$ называются равными, если они имеют одинаковый размер и $a_{ij} = b_{ij}$ $\left(i = 1,2,\dots,m;\ j = 1,2,\dots,n\right)$.

□

<u>*Определение 6.*</u> Матрица, все элементы которой равны нулю, называется нулевой матрицей и обозначается *O*.

□

<u>*Определение 7.*</u> Если $A=\left(a_{ij}\right)$ и $B=\left(b_{ij}\right)$ – две матрицы размера $m\times n$, а α – число, то сумма матриц и произведение матрицы на число определяются следующим образом:

$$A+B:=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix},\quad \alpha\cdot A:=\begin{pmatrix} \alpha\cdot a_{11} & \alpha\cdot a_{12} & \dots & \alpha\cdot a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha\cdot a_{m1} & \alpha\cdot a_{m2} & \dots & \alpha\cdot a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матрица $-A:=(-1)\cdot A$ называется противоположной по отношению к *A*.

□

<u>*Теорема 2.*</u> Множество $\mathbf{M_{m,n}}$ всех матриц размера $m\times n$ образует векторное пространство, то есть для любых *A, B, C* из $\mathbf{M_{m,n}}$ выполняются соотношения:

1. $A+B=B+A$;
2. $(A+B)+C=A+(B+C)$;
3. $A+O=A$;
4. $A+(-A)=O$;
5. $\alpha\cdot(A+B)=\alpha\cdot A+\alpha\cdot B$;
6. $(\alpha+\beta)\cdot A=\alpha\cdot A+\beta\cdot A$;
7. $\alpha\cdot(\beta\cdot A)=(\alpha\beta)\cdot A$;
8. $1\cdot A=A$.

<u>*Доказательство*</u> этих равенств тривиально и предоставляется читателю.

□

<u>*Определение 8.*</u> Матрица *A* размера $1\times p$ называется вектор-строкой:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \end{pmatrix}.$$

Матрица *B* размера $p\times 1$ называется вектор-столбцом:

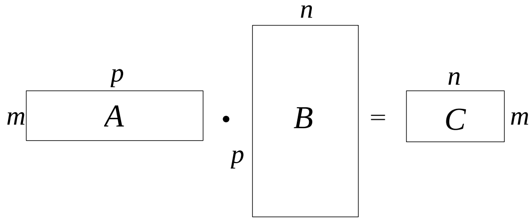
$$B=\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{p1} \end{pmatrix}.$$

Для этих матриц *A* и *B* произведение $A\cdot B$ определяется следующим образом:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{p1} \end{pmatrix}:=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\dots+a_{1p}b_{p1}=\sum_{k=1}^{p}a_{1k}b_{k1}.$$

□

Главное в определении произведения произвольных матриц *A* и *B* это то, что строки матрицы *A* умножаются (в смысле определения 8) на столбцы матрицы *B*. Поэтому произведение матриц определено только тогда, когда число столбцов матрицы *A* совпадает с числом строк матрицы *B*. Лучше всего это видно на схеме умножения матриц:



<u>*Определение 9.*</u> Произведением $A\cdot B$ матрицы $A=\left(a_{ij}\right)$ размера $m\times p$ на матрицу $B=\left(b_{ij}\right)$ размера $p\times n$ называется матрица $C=\left(c_{ij}\right)$ размера $m\times n$, где

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+...+a_{ip}b_{pj}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj} \qquad (11)$$

$\left(i=1,2,\dots,m;\ j=1,2,\dots,n\right)$.

□

Заметим, что равенство (11) есть произведение *i*-й строки матрицы *A* на *j*-й столбец матрицы *B*.

<u>*Числовая иллюстрация.*</u>

$$\begin{pmatrix}1&2&1\\4&0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&-4&5&2\\1&5&1&-7\\-2&2&0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot3+2\cdot1+1\cdot(-2) & 1\cdot(-4)+2\cdot5+1\cdot2 & 1\cdot5+2\cdot1+1\cdot0 & 1\cdot2+2\cdot(-7)+1\cdot1\\ 4\cdot3+0\cdot1+2\cdot(-2) & 4\cdot(-4)+0\cdot5+2\cdot2 & 4\cdot5+0\cdot1+2\cdot0 & 4\cdot2+0\cdot(-7)+2\cdot1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3&8&7&-11\\8&-12&20&10\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}2&3&4\\1&5&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20\\29\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4&-6&9&6\\0&-7&10&7\\5&8&-11&-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19&4&-4&-4\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4&5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&10&12\\12&15&18\\-4&-5&-6\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}2&3&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}=17.$$

□

Напомним, что через *I* мы обозначали единичную матрицу (см. пример 3).

Свойства произведения матриц

1. $A\cdot I=I\cdot A=A$;
2. $A\cdot\left(B+C\right)=A\cdot B+A\cdot C$;
3. $\left(A+B\right)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$;
4. $A\cdot\left(B\cdot C\right)=\left(A\cdot B\right)\cdot C$;
5. $\alpha\cdot\left(A\cdot B\right)=\left(\alpha\cdot A\right)\cdot B=A\cdot\left(\alpha\cdot B\right)$;
6. $\left(A\cdot B\right)^T=B^T\cdot A^T$;
7. В общем случае, $A\cdot B\neq B\cdot A$.
8. Если $A\cdot B=O$, то отсюда не следует, что одна из матриц *A* и *B* обязательно должна быть нулевой. Контрпример:

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6&-2\\-3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

<u>*Доказательства*</u> свойств 1–6 несложны и предоставляются читателю.

□

ЧАСТЬ 1: МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Лекция 4

Обратные матрицы

Прежде всего напомним, что множество всех матриц размера $m \times n$ обозначается $\mathbf{M_{m,n}}$ (см. теорему 2).

<u>*Определение 10.*</u> Пусть $A \in \mathbf{M_{n,n}}$. Матрица $B \in \mathbf{M_{n,n}}$ называется обратной по отношению к матрице A, если

$$A \cdot B = B \cdot A = I.$$

Обратная матрица обозначается следующим образом: $B := A^{-1}$.

□

<u>*Числовая иллюстрация.*</u> Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Равенство $A \cdot B = B \cdot A = I$ проверяется непосредственно. Следовательно, $B = A^{-1}$.

□

Свойства обратной матрицы

1. Существуют матрицы, не имеющие обратных (например, $A = O$ не имеет обратной, так как для любой матрицы B выполняется: $A \cdot B = B \cdot A = O$).

2. Если матрица имеет обратную, то эта обратная матрица единственна.

<u>*Доказательство.*</u> Пусть B и C – две матрицы, обратные по отношению к A. Тогда по свойствам 4 и 1 произведения матриц имеем:

$$B \cdot A \cdot C = (B \cdot A) \cdot C = I \cdot C = C,$$
$$B \cdot A \cdot C = B \cdot (A \cdot C) = B \cdot I = B.$$

Таким образом, $B = C$. □

3. Обратная матрица по отношению к обратной совпадает с исходной матрицей, т.е.

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A.$$

<u>*Доказательство.*</u> Взяв в качестве исходной матрицы матрицу $B = A^{-1}$, получаем, что $B \cdot A = A \cdot B = I$, то есть $A = B^{-1}$, что и требуется. □

4. Если матрицы $A, B \in \mathbf{M_{n,n}}$ имеют обратные, то

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

<u>*Доказательство.*</u> Проверим выполнение определения 10. Имеем по свойству 4 произведения матриц:

$$(A \cdot B) \cdot \left(B^{-1} \cdot A^{-1}\right) = A \cdot \left(B \cdot B^{-1}\right) \cdot A^{-1} = A \cdot I \cdot A^{-1} = I,$$
$$\left(B^{-1} \cdot A^{-1}\right) \cdot (A \cdot B) = B^{-1} \cdot \left(A^{-1} \cdot A\right) \cdot B = B^{-1} \cdot I \cdot B = I,$$

что и требовалось. □

Введем теперь следующее важное определение.

<u>*Определение 11.*</u> Пусть $A \in \mathbf{M_{n,n}}$. Число $a_{ij}^* = (-1)^{i+j}\left|A_{ij}\right|$ называется алгебраическим дополнением элемента a_{ij} матрицы A, а матрица $A^* = \left(a_{ij}^*\right)$ называется матрицей алгебраических дополнений матрицы A. □

Пример 7. Найдем матрицу A^* алгебраических дополнений матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & 0 & 1\\ 2 & -3 & 1\end{pmatrix}.$$

Имеем:

$$a_{11}^*=(-1)^2|A_{11}|=\begin{vmatrix}0 & 1\\ -3 & 1\end{vmatrix}=3;\quad a_{12}^*=(-1)^3|A_{12}|=-\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=4;\quad a_{13}^*=(-1)^4|A_{13}|=\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 2 & -3\end{vmatrix}=6;$$

$$a_{21}^*=(-1)^3|A_{21}|=-\begin{vmatrix}2 & 3\\ -3 & 1\end{vmatrix}=-11;\quad a_{22}^*=(-1)^4|A_{22}|=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-5;\quad a_{23}^*=(-1)^5|A_{23}|=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -3\end{vmatrix}=7;$$

$$a_{31}^*=(-1)^4|A_{31}|=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 0 & 1\end{vmatrix}=2;\quad a_{32}^*=(-1)^5|A_{32}|=-\begin{vmatrix}1 & 3\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-7;\quad a_{33}^*=(-1)^6|A_{33}|=\begin{vmatrix}1 & 2\\ -2 & 0\end{vmatrix}=4.$$

Таким образом,

$$A^*=\begin{pmatrix}3 & 4 & 6\\ -11 & -5 & 7\\ 2 & -7 & 4\end{pmatrix}.$$

□

Определение 12. Транспонированная матрица алгебраических дополнений матрицы A обозначается $\left(A^*\right)^T$ и называется присоединенной матрицей к матрице A.

□

Лемма 3. Справедливо равенство

$$\left(A^*\right)^T=\left(A^T\right)^*.$$

Доказательство предоставляется читателю.

□

Лемма 4. Справедливо следующее соотношение:

$$A\cdot\left(A^*\right)^T=\left(A^*\right)^T\cdot A=|A|\cdot I.$$

Доказательство. Докажем лишь равенство $A\cdot\left(A^*\right)^T=|A|\cdot I$ в случае n=3. Имеем:

$$A\cdot\left(A^*\right)^T=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_{11}^* & a_{21}^* & a_{31}^*\\ a_{12}^* & a_{22}^* & a_{32}^*\\ a_{13}^* & a_{23}^* & a_{33}^*\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}a_{11}^*+a_{12}a_{12}^*+a_{13}a_{13}^* & a_{11}a_{21}^*+a_{12}a_{22}^*+a_{13}a_{23}^* & a_{11}a_{31}^*+a_{12}a_{32}^*+a_{13}a_{33}^*\\ a_{21}a_{11}^*+a_{22}a_{12}^*+a_{23}a_{13}^* & a_{21}a_{21}^*+a_{22}a_{22}^*+a_{23}a_{23}^* & a_{21}a_{31}^*+a_{22}a_{32}^*+a_{23}a_{33}^*\\ a_{31}a_{11}^*+a_{32}a_{12}^*+a_{33}a_{13}^* & a_{31}a_{21}^*+a_{32}a_{22}^*+a_{33}a_{23}^* & a_{31}a_{31}^*+a_{32}a_{32}^*+a_{33}a_{33}^*\end{pmatrix}.$$

Покажем, что в полученной матрице все элементы, стоящие на главной диагонали, равны $|A|$, а все остальные элементы равны нулю.

Распишем, к примеру, второй элемент на главной диагонали. Имеем:

$$a_{21}a_{21}^*+a_{22}a_{22}^*+a_{23}a_{23}^*=$$

$$=a_{21}\cdot(-1)^{2+1}|A_{21}|+a_{22}\cdot(-1)^{2+2}|A_{22}|+a_{23}\cdot(-1)^{2+3}|A_{23}|=\sum_{k=1}^{3}(-1)^{2+k}a_{2k}\cdot|A_{2k}|=|A|,$$

так как последнее равенство есть разложение определителя матрицы A по второй строке (см. теорему 1).

Преобразуем теперь элемент, стоящий на пересечении первой строки и второй колонны. Имеем:

$$a_{11}a_{21}^{*}+a_{12}a_{22}^{*}+a_{13}a_{23}^{*}=a_{11}\cdot(-1)^{2+1}\left|A_{21}\right|+a_{12}\cdot(-1)^{2+2}\left|A_{22}\right|+a_{13}\cdot(-1)^{2+3}\left|A_{23}\right|=$$

$$=(-1)^{2+1}a_{11}\cdot\begin{vmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}+(-1)^{2+2}a_{12}\cdot\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+(-1)^{2+3}a_{13}\cdot\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}.$$

Заключительное равенство просто представляет собой разложение последнего определителя по второй строке. Но в этом последнем определителе первая и вторая строки совпадают, поэтому в силу свойства 3 определителей он равен нулю.

Все остальные необходимые факты доказываются аналогично.

□

<u>*Теорема 3.*</u> 1) Если $|A|\neq 0$, то обратная к A матрица существует и имеет вид:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\left(A^{*}\right)^{T}. \qquad (12)$$

2) Если $|A|=0$, то A^{-1} не существует.

<u>*Доказательство.*</u> 1) Из соотношения, доказанного в лемме 4, получаем:

$$A\cdot\left(\frac{1}{|A|}\cdot\left(A^{*}\right)^{T}\right)=\frac{1}{|A|}\cdot A\cdot\left(A^{*}\right)^{T}=\frac{1}{|A|}\cdot|A|\cdot I=I.$$

Аналогично доказывается соотношение $\left(\frac{1}{|A|}\cdot\left(A^{*}\right)^{T}\right)\cdot A=I.$ Отсюда и вытекает (12).

2) Предположим, что A^{-1} существует. Тогда $A\cdot A^{-1}=I.$ Из примера 3 следует, что $\left|A\cdot A^{-1}\right|=1.$ А из свойства (9) определителей вытекает, что $|A|\cdot\left|A^{-1}\right|=1,$ то есть 0=1.

Полученное противоречие доказывает, что A^{-1} не существует.

□

<u>*Пример 8.*</u> Пусть A – та же матрица, что и в примере 7, в котором подсчитано, что $A^{*}=\begin{pmatrix}3&4&6\\-11&-5&7\\2&-7&4\end{pmatrix}$. Тогда $\left(A^{*}\right)^{T}=\begin{pmatrix}3&-11&2\\4&-5&-7\\6&7&4\end{pmatrix}$. Вычисляя определитель матрицы A, получаем $|A|=29$. Теперь по формуле (12):

$$A^{-1}=\frac{1}{29}\cdot\left(A^{*}\right)^{T}=\begin{pmatrix}\frac{3}{29}&-\frac{11}{29}&\frac{2}{29}\\\frac{4}{29}&-\frac{5}{29}&-\frac{7}{29}\\\frac{6}{29}&\frac{7}{29}&\frac{4}{29}\end{pmatrix}.$$

□

Линейные системы n уравнений с n неизвестными

В дальнейшем мы будем использовать обозначение: $R^{n}:=\mathbf{M}_{\mathbf{n,1}}$.

Рассмотрим следующую систему n линейных уравнений с n неизвестными $x_1,\ldots,x_n$:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}. \qquad (13)$$

Эту систему можно записать в матричном виде $A\cdot x=b$, где $A=\left(a_{ij}\right)$ – матрица коэффициентов при неизвестных, $b=\begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}\in R^n$ – столбец свободных членов и $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}\in R^n$ – столбец неизвестных. Обозначим $\Delta=|A|$ – главный определитель системы, а также введем вспомогательные определители:

$$\Delta_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

которые получаются из Δ заменой j-й колонны на столбец свободных членов.

<u>*Теорема 4*</u> (правило Крамера). Если $\Delta\neq 0$, то система (13) обладает единственным решением, которое имеет вид: $x_1=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2=\dfrac{\Delta_2}{\Delta},\dots,x_n=\dfrac{\Delta_n}{\Delta}$.

<u>*Доказательство.*</u> Так как $\Delta\neq 0$, то по теореме 3 существует A^{-1} и следовательно:

$$A\cdot x=b\ \Leftrightarrow\ A^{-1}\cdot(A\cdot x)=A^{-1}\cdot b\ \Leftrightarrow\ \left(A^{-1}\cdot A\right)\cdot x=A^{-1}\cdot b\ \Leftrightarrow\ x=A^{-1}\cdot b=$$

$$=\frac{1}{\Delta}\cdot\begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{21}^* & \dots & a_{n1}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^* & \dots & a_{n2}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n}^* & a_{2n}^* & \dots & a_{nn}^* \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta}\cdot\begin{pmatrix} b_1a_{11}^*+b_2a_{21}^*+\dots+b_na_{n1}^* \\ b_1a_{12}^*+b_2a_{22}^*+\dots+b_na_{n2}^* \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_1a_{1n}^*+b_2a_{2n}^*+\dots+b_na_{nn}^* \end{pmatrix}.$$

Рассуждением, аналогичным проведенному в доказательстве леммы 4, показывается, что $b_1a_{1j}^*+b_2a_{2j}^*+\dots+b_na_{nj}^*=\Delta_j$, поэтому последнее равенство равносильно следующему:

$$x=\frac{1}{\Delta}\cdot\begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \dots \\ \Delta_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{\Delta_1}{\Delta} \\ \dfrac{\Delta_2}{\Delta} \\ \dots \\ \dfrac{\Delta_n}{\Delta} \end{pmatrix}.$$

□

<u>*Теорема 5.*</u> (обратная). Если система (13) имеет единственное решение, то $\Delta\neq 0$.

<u>*Доказательство*</u> этой теоремы мы опускаем.

□

<u>*Следствие.*</u> Главный определитель Δ системы (13) равен нулю тогда и только тогда, когда эта система не имеет решений, либо имеет бесконечное множество решений.

<u>*Числовая иллюстрация.*</u> Легко видеть, что система $\begin{cases} x_1+5x_2=1 \\ x_1+5x_2=7 \end{cases}$ не имеет решений, в то время, как система $\begin{cases} 3x_1-x_2=1 \\ 6x_1-2x_2=2 \end{cases}$ имеет бесконечно много решений. Заметим, что главные определители этих систем равны нулю. □

ЧАСТЬ 2: ВЕКТОРЫ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

Лекция 5

Линейная зависимость и линейная независимость векторов

В этом разделе мы подробнее изучим множество вектор-столбцов R^n, введенное нами в конце ЧАСТИ 1. По теореме 2 это множество является линейным пространством. Элементы из R^n мы будем просто называть векторами и обозначать малыми латинскими буквами с черточками наверху (например, $\overline{a}, \overline{b}$ и т.д.).

Определение 13. Вектор $\overline{a} \in R^n$ называется линейной комбинацией векторов $\overline{a}^{(1)}, \overline{a}^{(2)}, ..., \overline{a}^{(m)} \in R^n$, если существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ такие, что

$$\overline{a} = \alpha_1 \overline{a}^{(1)} + \alpha_2 \overline{a}^{(2)} + ... + \alpha_m \overline{a}^{(m)}.$$

□

Определение 14. Система векторов $\left\{\overline{a}^{(1)}, \overline{a}^{(2)}, ..., \overline{a}^{(m)}\right\} \subset R^n$ называется линейно независимой, если из соотношения $\alpha_1 \overline{a}^{(1)} + \alpha_2 \overline{a}^{(2)} + ... + \alpha_m \overline{a}^{(m)} = \overline{o}$ вытекает равенство $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_m = 0$. В противном случае данная система называется линейно зависимой (т.е. исходная система линейно зависима, если существуют m чисел $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$, неравные одновременно нулю и такие, что $\alpha_1 \overline{a}^{(1)} + \alpha_2 \overline{a}^{(2)} + ... + \alpha_m \overline{a}^{(m)} = \overline{o}$).

□

Доказательства многих свойств, приводимых далее, мы опускаем ввиду их простоты, давая предпочтение числовым иллюстрациям.

Свойства систем векторов

1. Система векторов $\left\{\overline{a}^{(1)}, \overline{a}^{(2)}, ..., \overline{a}^{(m)}\right\} \subset R^n$ линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов системы является линейной комбинацией остальных ее векторов.

Числовая иллюстрация. Система векторов

$$\overline{a}^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \overline{a}^{(2)} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

является линейно зависимой, так как $\overline{a}^{(2)} = -2\overline{a}^{(1)}$.

□

2. Система векторов линейно зависима, если она содержит нулевой вектор $\overline{o}$.

Числовая иллюстрация. Система векторов

$$\overline{a}^{(1)} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \ \overline{a}^{(2)} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -3 \\ 16 \end{pmatrix}, \ \overline{a}^{(3)} = \overline{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

линейно зависима, так как $0 \cdot \overline{a}^{(1)} + 0 \cdot \overline{a}^{(2)} + 1 \cdot \overline{a}^{(3)} = \overline{o}$ (см. определение 14).

□

3. Система векторов линейно зависима, если она содержит линейно зависимую подсистему.

Числовая иллюстрация. Система векторов

$$\overline{a}^{(1)}=\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix},\ \overline{a}^{(2)}=\begin{pmatrix}-6\\-2\\4\end{pmatrix},\ \overline{a}^{(3)}=\begin{pmatrix}5\\1\\1\end{pmatrix}$$

линейно зависима, так как ее подсистема $\left\{\overline{a}^{(1)},\overline{a}^{(2)}\right\}$ линейно зависима (см. числовую иллюстрацию свойства 1).

□

4. Всякая подсистема линейно независимой системы векторов линейно независима.

Доказательство. Это утверждение – противоположное к обратному для свойства 3. Поэтому оно справедливо вместе со свойством 3.

□

5. Пусть в пространстве R^n задана система n векторов

$$\overline{a}^{(1)}=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\dots\\a_{n1}\end{pmatrix},\ \overline{a}^{(2)}=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\dots\\a_{n2}\end{pmatrix},\dots,\overline{a}^{(n)}=\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\dots\\a_{nn}\end{pmatrix}. \tag{14}$$

Эта система линейно независима тогда и только тогда, когда

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{n1}&a_{n2}&\dots&a_{nn}\end{vmatrix}\neq 0. \tag{15}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что равенство $\alpha_1\overline{a}^{(1)}+\alpha_2\overline{a}^{(2)}+\dots+\alpha_n\overline{a}^{(n)}=\overline{o}$, входящее в определение 14, равносильно системе:

$$\begin{cases}a_{11}\alpha_1+a_{12}\alpha_2+\dots+a_{1n}\alpha_n=0\\a_{21}\alpha_1+a_{22}\alpha_2+\dots+a_{2n}\alpha_n=0\\\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\a_{n1}\alpha_1+a_{n2}\alpha_2+\dots+a_{nn}\alpha_n=0\end{cases}. \tag{16}$$

Если (15) выполнено, то по правилу Крамера (теорема 4) система (16) имеет единственное решение: $\alpha_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=0,\ \alpha_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=0,\dots,\alpha_n=\frac{\Delta_n}{\Delta}=0$, что доказывает линейную независимость системы векторов (14).

Обратно, если система векторов (14) линейно независима, то по определению 14 система уравнений (16) имеет единственное решение $\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_m=0.$ По теореме 5 главный определитель $\Delta\neq 0.$

□

6. Если система векторов (14) линейно независима, то она образует базис в пространстве R^n, то есть любой вектор из R^n можно единственным образом представить в виде линейной комбинации векторов системы (14).

Доказательство. Пусть $\overline{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\dots\\b_n\end{pmatrix}$ – произвольный вектор из R^n. Тогда равенство

$\alpha_1\overline{a}^{(1)}+\alpha_2\overline{a}^{(2)}+\dots+\alpha_n\overline{a}^{(n)}=\overline{b}$ равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + ... + a_{1n}\alpha_n = b_1 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + ... + a_{2n}\alpha_n = b_2 \\ .... \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + ... + a_{nn}\alpha_n = b_n \end{cases}. \tag{17}$$

По свойству 5 главный определитель этой системы $\Delta \neq 0$. По правилу Крамера (теорема 4) полученная система имеет единственное решение: $\alpha_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, $\alpha_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}, ..., \alpha_n = \dfrac{\Delta_n}{\Delta}$. А это и означает, что вектор $\overline{b}$ есть линейная комбинация векторов $\overline{a}^{(1)}, \overline{a}^{(2)}, ..., \overline{a}^{(n)} \in R^n$ с коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$.

□

<u>*Определение 15.*</u> Коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ разложения вектора $\overline{b}$ по базису $\left\{\overline{a}^{(1)}, \overline{a}^{(2)}, ..., \overline{a}^{(n)}\right\} \subset R^n$ называются координатами вектора $\overline{b}$ относительно данного базиса.

□

<u>*Пример 9.*</u> Векторы

$$\overline{e}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, \ \overline{e}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, ..., \overline{e}^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix}$$

образуют базис в пространстве R^n, так как

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

(см. пример 3). Этот базис называется естественным базисом в пространстве R^n. Если $\overline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$, то легко видеть, что $\overline{b} = b_1\overline{e}^{(1)} + b_2\overline{e}^{(2)} + ... + b_n\overline{e}^{(n)}$, то есть элементы $b_1, b_2, ..., b_n$ как раз и являются координатами вектора $\overline{b}$ относительно естественного базиса.

В пространстве R^3 векторы естественного базиса чаще всего обозначаются так:

$$\overline{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \overline{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \overline{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

□

<u>*Пример 10.*</u> Доказать, что система векторов

$$\overline{a}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \overline{a}^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \overline{a}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

образует базис в пространстве R^3, и найти разложение вектора $\overline{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ в этом базисе.

Имеем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 .$$

По свойствам 5 и 6 система векторов $\{\bar{a}^{(1)}, \bar{a}^{(2)}, \bar{a}^{(3)}\}$ есть базис в пространстве R^3. Для нахождения координат вектора $\bar{b}$ относительно этого базиса составим систему (17):

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 6 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 3. \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 5 \end{cases}$$

Решим ее по правилу Крамера. Вычислим вспомогательные определители:

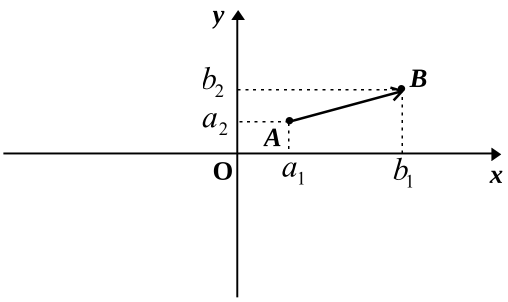
$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -10,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 15.$$

Получаем: $\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = -2,\ \alpha_3 = 3.$ То есть, $\bar{b} = \bar{a}^{(1)} - 2\bar{a}^{(2)} + 3\bar{a}^{(3)}$.

□

Векторы в R^2 и в R^3

На плоскости и в трехмерном пространстве векторы можно интерпретировать как направленные отрезки. Рассмотрим подробно случай плоскости (пространственный случай трактуется аналогично).



Пусть $A(a_1, a_2)$ и $B(b_1, b_2)$ – две точки плоскости, заданные своими декартовыми координатами. Поставим в соответствие этим двум точкам направленный отрезок $\overline{AB}$, который рисуется стрелкой с началом в точке A и концом в точке B. Направленный отрезок $\overline{AB}$ отождествим с двумерным вектором $\begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$. После этого отождествления получаем:

1) два направленных отрезка равны, если один из них получен параллельным переносом другого, или, что то же самое, если они параллельны, стрелки смотрят в одну и ту же сторону и их длины равны (см. определение 5);

2) направленный отрезок, у которого начало и конец совпадают, соответствует нулевому вектору (см. определение 6);

3) сумма двух направленных отрезков, полученная по "правилу параллелограмма", соответствует понятию суммы векторов из определения 7;

4) произведение направленного отрезка на число α, заключающееся в растяжении отрезка, если $|\alpha| > 1$(соотв., сжатии отрезка, если $|\alpha| < 1$), и изменении направления отрезка на противоположное, если $\alpha < 0$, соответствует понятию умножения вектора на число (см. определение 7).

В дальнейшем мы будем обозначать введенное отождествление знаком равенства, то есть $\overline{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$.

ЧАСТЬ 2: ВЕКТОРЫ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

Лекция 6

Замена базиса в пространстве R^n

Зафиксируем в пространстве R^n базис $\left(\overline{a}^{(1)},\overline{a}^{(2)},...,\overline{a}^{(n)}\right)$, который мы для удобства будем записывать в виде строки, состоящей из векторов. Введем теперь в том же пространстве новый базис $\left(\overline{a}^{(1)'},\overline{a}^{(2)'},...,\overline{a}^{(n)'}\right)$. Разложим каждый вектор нового базиса по векторам исходного базиса:

$$\overline{a}^{(j)'}=\sum_{i=1}^{n}s_{ij}\overline{a}^{(i)}. \qquad (18)$$

Рассмотрим матрицу

$$S=\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n1} & s_{n2} & \dots & s_{nn} \end{pmatrix}$$

и запишем равенство (18) в матричном виде:

$$\left(\overline{a}^{(1)'},\overline{a}^{(2)'},...,\overline{a}^{(n)'}\right)=\left(\overline{a}^{(1)},\overline{a}^{(2)},...,\overline{a}^{(n)}\right)\cdot S. \qquad (19)$$

<u>*Определение 16.*</u> Матрица *S*, чья *j*-я колонна состоит из координат вектора $\overline{a}^{(j)'}$ относительно исходного базиса $\left(\overline{a}^{(1)},\overline{a}^{(2)},...,\overline{a}^{(n)}\right)$ (см. определение15), называется матрицей перехода от исходного базиса к новому базису.

□

Пусть $\overline{b}\in R^n$ – произвольный вектор. Его можно разложить в исходном базисе:

$$\overline{b}=\alpha_1\overline{a}^{(1)}+\alpha_2\overline{a}^{(2)}+...+\alpha_n\overline{a}^{(n)}=\left(\overline{a}^{(1)},\overline{a}^{(2)},...,\overline{a}^{(n)}\right)\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \dots\\ \alpha_n\end{pmatrix}, \qquad (20)$$

а также относительно нового базиса:

$$\overline{b}=\alpha_1'\overline{a}^{(1)'}+\alpha_2'\overline{a}^{(2)'}+...+\alpha_n'\overline{a}^{(n)'}=\left(\overline{a}^{(1)'},\overline{a}^{(2)'},...,\overline{a}^{(n)'}\right)\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1'\\ \alpha_2'\\ \dots\\ \alpha_n'\end{pmatrix}. \qquad (21)$$

Естественно возникает вопрос: можно ли выразить столбец новых координат $\begin{pmatrix}\alpha_1'\\ \dots\\ \alpha_n'\end{pmatrix}$ вектора $\overline{b}$ через старые координаты $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \dots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$ с использованием матрицы S ? Ответ на этот вопрос содержится в следующей теореме.

<u>*Теорема 6.*</u> Матрица *S* всегда обратима и справедливо соотношение:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \dots \\ \alpha_n' \end{pmatrix} = S^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \qquad (22)$$

<u>*Доказательство.*</u> Очевидно, соотношение (19) можно записать, используя естественные координаты всех входящих в него векторов:

$$\begin{pmatrix} a_{11}' & a_{12}' & \dots & a_{1n}' \\ a_{21}' & a_{22}' & \dots & a_{2n}' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}' & a_{n2}' & \dots & a_{nn}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot S.$$

Возьмем определители от левой и правой части этого матричного равенства. Применяя свойство 9 теории определителей, получаем $\Delta' = \Delta \cdot |S|$. По свойству 5 систем векторов имеем $\Delta \neq 0,\ \Delta' \neq 0$. Следовательно, $|S| \neq 0$ и по теореме 3 матрица S обратима.

Из соотношений (20) и (21) получаем:

$$\left(\bar{a}^{(1)'}, \bar{a}^{(2)'}, \dots, \bar{a}^{(n)'}\right) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ \dots \\ \alpha_n' \end{pmatrix} = \left(\bar{a}^{(1)}, \bar{a}^{(2)}, \dots, \bar{a}^{(n)}\right) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Используем в левой части равенство (19):

$$\left(\bar{a}^{(1)}, \bar{a}^{(2)}, \dots, \bar{a}^{(n)}\right) \cdot S \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ \dots \\ \alpha_n' \end{pmatrix} = \left(\bar{a}^{(1)}, \bar{a}^{(2)}, \dots, \bar{a}^{(n)}\right) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует ввиду единственности коэффициентов разложения по базису:

$$S \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ \dots \\ \alpha_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \Rightarrow S^{-1} \cdot S \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ \dots \\ \alpha_n' \end{pmatrix} = S^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ \dots \\ \alpha_n' \end{pmatrix} = S^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

□

<u>*Пример 11.*</u> Пусть $\left(\bar{i},\ \bar{j},\ \bar{k}\right)$– естественный базис в пространстве R^3 (см. пример 9) и $\bar{b} = 3\bar{i} - 2\bar{j} + 5\bar{k}$. Рассмотрим систему векторов:

$$\bar{i}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \bar{j}' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \bar{k}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

В примере 10 доказано, что $\left(\bar{i}',\ \bar{j}',\ \bar{k}'\right)$– базис в пространстве R^3. Найдем координаты вектора $\bar{b}$ относительно этого нового базиса.

Используя определение 16, составляем матрицу S перехода от исходного базиса к новому базису:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Мы видели, что $|S| = 5$. Вычисляем матрицу алгебраических дополнений, а затем и обратную матрицу:

$$S^* = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow S^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

Для вектора $\bar{b}$ столбец старых координат имеет вид: $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$. Следовательно, по теореме 6

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^{/} \\ \alpha_2^{/} \\ \alpha_3^{/} \end{pmatrix} = S^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{13}{5} \\ -\frac{6}{5} \\ \frac{22}{5} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\bar{b} = -\frac{13}{5}\bar{i}^{/} - \frac{6}{5}\bar{j}^{/} + \frac{22}{5}\bar{k}^{/}$.

□

Скалярное произведение векторов и его свойства

<u>*Определение 17.*</u> Скалярным произведением векторов $\bar{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix}$ и $\bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$ называется <u>число</u> $\bar{a} \cdot \bar{b} := \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n$, то есть число, равное сумме произведений одноименных координат векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

□

Заметим, что согласно определению 8 скалярное произведение можно интерпретировать как произведение матриц, а именно:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{a}^T \cdot \bar{b}, \tag{23}$$

где $\bar{a}^T = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix}$ – транспонированная матрица по отношению к $\bar{a}$, а умножение в правой части (23) – это умножение матриц.

Доказательства следующих свойств скалярного произведения элементарны и мы их опускаем.

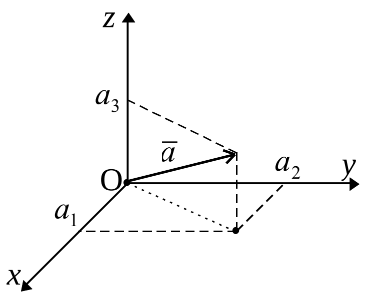
Свойства скалярного произведения

1. $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$ (коммутативность);
2. $\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}$ (дистрибутивность);
3. $\alpha(\bar{a} \cdot \bar{b}) = (\alpha\bar{a}) \cdot \bar{b} = \bar{a} \cdot (\alpha\bar{b})$ (ассоциативность по отношению к умножению на число);
4. $\bar{a} \cdot \bar{a} \geq 0$.

Теорема 7. Пусть $\overline{a}$ и $\overline{b}$ – ненулевые направленные отрезки (векторы) в пространстве R^3 (или в R^2), $|\overline{a}|$ и $|\overline{b}|$ – их длины, а φ – угол между $\overline{a}$ и $\overline{b}$ $(0 \le \varphi \le \pi)$. Тогда:

1) $|\overline{a}| = \sqrt{\overline{a} \cdot \overline{a}}$;

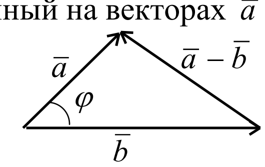
2) $\cos\varphi = \dfrac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|}$.



Доказательство. Доказательство проведем для пространства R^3 .

1) Отложим вектор $\overline{a}$ от начала координат. Длина проекции вектора $\overline{a}$ на плоскость xOy вычисляется по теореме Пифагора в прямоугольном треугольнике, лежащем в этой плоскости, и равна $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$. Рассматривая теперь прямоугольный треугольник с катетом a_3, опять по теореме Пифагора получаем: $|\overline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \; = \sqrt{\overline{a} \cdot \overline{a}}$ (последнее следует из определения 17).

2) Приведем векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ к общему началу и рассмотрим треугольник, построенный на векторах $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{a} - \overline{b}$. По теореме косинусов имеем:



$$|\overline{a} - \overline{b}|^2 = |\overline{a}|^2 + |b|^2 - 2|\overline{a}||\overline{b}|\cos\varphi \;\Rightarrow$$

$$(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + $$
$$+ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - 2|\overline{a}||\overline{b}|\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \quad a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = |\overline{a}||\overline{b}|\cos\varphi \;\Rightarrow\; \cos\varphi = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|}.$$

□

Теорема 7 побуждает ввести следующее

Определение 18. Пусть $\overline{a}$ и $\overline{b}$ – такие же, как в определении 17.

1) Нормой (длиной) вектора $\overline{a}$ называется число:

$$\|\overline{a}\| = \sqrt{\overline{a} \cdot \overline{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} \;. \qquad (24)$$

2) Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ ненулевые, то углом между ними называется число φ $(0 \le \varphi \le \pi)$, вычисляемое из соотношения:

$$\cos\varphi = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{\|\overline{a}\| \cdot \|\overline{b}\|}. \qquad (25)$$

□

Ясно, что формула (24) обобщает понятие длины вектора на произвольное *n*-мерное пространство. Что касается формулы (25), то она единственным образом определяет угол φ в случае, если ее правая часть по модулю не превышает единицы. На самом деле, справедлив следующий результат, из которого следует корректность формулы (25).

Теорема 8 (неравенство Коши-Буняковского). Для любых векторов $\overline{a}, \overline{b} \in R^n$ справедливо неравенство:

$$|\overline{a} \cdot \overline{b}| \le \|\overline{a}\| \cdot \|\overline{b}\|. \qquad (26)$$

Доказательство опускается.

□

ЧАСТЬ 2: ВЕКТОРЫ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

Лекция 7

Продолжим изучение понятий, связанных со скалярным произведением векторов.

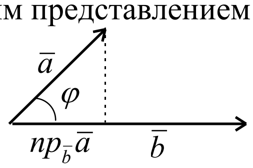
Определение 19. Проекцией вектора $\overline{a} \in R^n$ на ненулевой вектор $\overline{b} \in R^n$ называется число

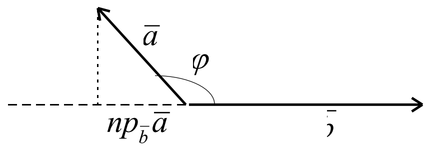
$$np_{\overline{b}}\,\overline{a} = \|\overline{a}\| \cdot \cos\varphi, \qquad (27)$$

где φ – угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

□

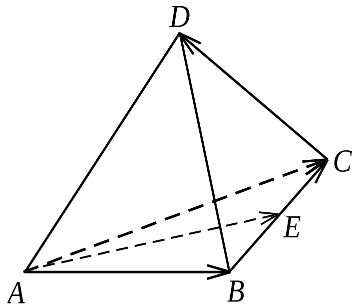
Нижеследующие рисунки показывают, что понятие проекции в R^n согласуется с обычным представлением о проекции в R^2 и R^3:





Заметим, что если угол φ тупой, то проекция вектора на вектор есть отрицательное число. Поэтому в литературе иногда вместо термина "проекция" употребляется словосочетание "алгебраическое значение проекции".

Пример 12. Даны вершины пирамиды $A(3,5,4)$, $B(8,7,4)$, $C(5,10,4)$, $D(4,7,8)$. Найти длины ребер *AB* и *CD,* угол $\angle ABC$, проекцию вектора $\overline{AB}$ на вектор $\overline{CD}$, а также координаты точки *E*, являющейся серединой ребра *BC*.



Прежде всего найдем координаты нужных нам векторов:

$\overline{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overline{BC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overline{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overline{CD} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Длины ребер *AB* и *CD* – это нормы (длины) соответствующих векторов, то есть по формуле (24) имеем:

$$\|\overline{AB}\| = \sqrt{5^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{29}, \quad \|\overline{CD}\| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2 + 4^2} = \sqrt{26}.$$

Угол $\varphi = \angle ABC$ – это угол между вектором $\overline{BA} = -\overline{AB} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ и вектором $\overline{BC}$,

поэтому по формуле (25) получаем:

$$\cos\varphi = \frac{\overline{BA} \cdot \overline{BC}}{\|\overline{BA}\| \cdot \|\overline{BC}\|} = \frac{(-5)\cdot(-3) + (-2)\cdot 3 + 0 \cdot 0}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{(-3)^2 + 3^2 + 0^2}} = \frac{9}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{18}} = \frac{3}{\sqrt{58}}.$$

Следовательно, $\varphi = \arccos\dfrac{3}{\sqrt{58}}$.

Из формул (27) и (25) следует, что $np_{\overline{CD}}\overline{AB} = \dfrac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{\|\overline{CD}\|} = \dfrac{-11}{\sqrt{26}}$. Найдем $\overline{AE}$. Пусть

$E = E(x, y, z)$. Тогда $\overline{AE} = \begin{pmatrix} x-3 \\ y-5 \\ z-4 \end{pmatrix}$. Так как *E* делит отрезок *BC* пополам, то

$\overline{EC} = \frac{1}{2}\cdot\overline{BC} = \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 1{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$. По правилу сложения векторов как направленных отрезков имеем:

$\overline{AC} = \overline{AE} + \overline{EC} \Rightarrow \overline{AE} = \overline{AC} - \overline{EC} \Rightarrow \begin{pmatrix} x-3 \\ y-5 \\ z-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 3{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 6{,}5 \\ y = 8{,}5 \\ z = 4 \end{cases}$. Итак, точка E имеет координаты (6,5;8,5;4).

□

Определение 20. Вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ из R^n называются ортогональными, если $\overline{a}\cdot\overline{b} = 0$.

□

Из теоремы 7 следует, что два ненулевые вектора в R^3 (или в R^2) ортогональны тогда и только тогда, когда угол между ними равен $\frac{\pi}{2}$, то есть когда эти векторы перпендикулярны.

Пример 13. При каком значении параметра t векторы $\overline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ t \\ 6 \end{pmatrix}$ и $\overline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$ ортогональны?

Имеем: $\overline{a}\cdot\overline{b} = 0 \Leftrightarrow 6 + 35 - 2t + 48 = 0 \Leftrightarrow 2t = 89 \Leftrightarrow t = 44{,}5$.

□

Свойства нормы вектора

1. Для любого $\overline{a} \in R^n$ $\|\overline{a}\| \ge 0$, причем $\|\overline{a}\| = 0$ тогда и только тогда, когда $\overline{a} = 0$.
2. Для любого $\overline{a} \in R^n$ и числа $\lambda \in R$ $\|\lambda\overline{a}\| = |\lambda|\cdot\|\overline{a}\|$.
3. Для любых $\overline{a}, \overline{b} \in R^n$ справедливо неравенство треугольника: $\|\overline{a} + \overline{b}\| \le \|\overline{a}\| + \|\overline{b}\|$.

Доказательство. Свойства 1 и 2 непосредственно следуют из определения 18. Докажем свойство 3. С помощью формулы (24) перепишем неравенство треугольника в виде:

$$\sqrt{(\overline{a}+\overline{b})\cdot(\overline{a}+\overline{b})} \le \sqrt{\overline{a}\cdot\overline{a}} + \sqrt{\overline{b}\cdot\overline{b}} \Leftrightarrow (\overline{a}+\overline{b})\cdot(\overline{a}+\overline{b}) \le \overline{a}\cdot\overline{a} + 2\sqrt{\overline{a}\cdot\overline{a}}\cdot\sqrt{\overline{b}\cdot\overline{b}} + \overline{b}\cdot\overline{b} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{a}\cdot\overline{a} + \overline{b}\cdot\overline{a} + \overline{a}\cdot\overline{b} + \overline{b}\cdot\overline{b} \le \overline{a}\cdot\overline{a} + 2\|\overline{a}\|\cdot\|\overline{b}\| + \overline{b}\cdot\overline{b} \Leftrightarrow 2\overline{a}\cdot\overline{b} \le 2\|\overline{a}\|\cdot\|\overline{b}\| \Leftrightarrow \overline{a}\cdot\overline{b} \le \|\overline{a}\|\cdot\|\overline{b}\|.$$

Последнее же неравенство следует из теоремы 8.

□

Определение 21. Вектор из R^n называется единичным, если его норма равна единице.

□

Например, векторы $\overline{e}^{(1)}, \overline{e}^{(2)}, ..., \overline{e}^{(n)}$ естественного базиса в R^n, рассмотренные в примере 9, являются единичными векторами (в частности, вектора $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ – единичные векторы в R^3). Применяя определение 20, видим также, что векторы этого базиса попарно ортогональны. Введем следующее общее

Определение 22. Базис в R^n называется ортонормированным, если все векторы этого базиса единичные и попарно ортогональные.

□

Таким образом, $\left(\overline{e}^{(1)}, \overline{e}^{(2)}, ..., \overline{e}^{(n)}\right)$ – ортонормированный базис в R^n (соответственно, $\left(\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\right)$ – ортонормированный базис в R^3).

Пример 14. Пусть $\overline{a} \in R^n$ – ненулевой вектор. Рассмотрим вектор $\overline{a}^0 := \dfrac{\overline{a}}{\|\overline{a}\|}$. Вектор $\overline{a}^0$ направлен в ту же сторону, что и вектор $\overline{a}$, и из свойства 2 нормы вектора следует, что $\|\overline{a}^0\| = 1$, т.е. вектор $\overline{a}^0$ – единичный. Процедура получения из вектора $\overline{a}$ вектор $\overline{a}^0$ называется нормировкой вектора $\overline{a}$.

□

Ортогональные матрицы

Определение 23. Матрица $A \in$ **Mn,n** называется ортогональной, если $A^{-1} = A^T$.

□

Теорема 9. Матрица $A \in$ **Mn,n** ортогональна тогда и только тогда, когда ее столбцы представляют собой единичные и попарно ортогональные векторы.

Доказательство. Пусть матрица $A \in$ **Mn,n** ортогональна. Тогда $A^T \cdot A = I$. Из этого соотношение следует требуемое утверждение. Для простоты покажем это при *n*=3. Имеем:

$$A^T \cdot A = I \quad \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}a_{11} + a_{21}a_{21} + a_{31}a_{31} & a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} & a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33} \\ a_{12}a_{11} + a_{22}a_{21} + a_{32}a_{31} & a_{12}a_{12} + a_{22}a_{22} + a_{32}a_{32} & a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} \\ a_{13}a_{11} + a_{23}a_{21} + a_{33}a_{31} & a_{13}a_{12} + a_{23}a_{22} + a_{33}a_{32} & a_{13}a_{13} + a_{23}a_{23} + a_{33}a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Приравнивая элементы главной диагонали, получаем условие единичности векторов-столбцов матрицы *A*. Приравнивая остальные элементы, получаем попарную ортогональность векторов-столбцов матрицы *A*.

Наоборот, предположим теперь, что столбцы матрицы $A \in$ **Mn,n** представляют собой единичные и попарно ортогональные векторы. Это означает, что выполняется последнее матричное равенство в полученной цепочке равносильностей. Возвращаясь по этой цепочке назад, получаем, что $A^T \cdot A = I$. Из свойства 9 теории определителей следует, что $|A^T| \cdot |A| = |I| = 1$. Следовательно, $|A| \neq 0$ и по теореме 3 существует A^{-1}. Умножая справа равенство $A^T \cdot A = I$ на матрицу A^{-1}, получаем соотношение: $A^T = A^{-1}$.

□

Теорема 10. Матрица $A \in$ **Mn,n** ортогональна тогда и только тогда, когда ее строки представляют собой единичные и попарно ортогональные векторы.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 9.

□

Теорема 11. Если *A* – ортогональная матрица, то либо $|A| = 1$, либо $|A| = -1$.

Доказательство. Действительно, так как $A \cdot A^T = I$, то по свойству 9 теории определителей $|A| \cdot |A^T| = 1$. Но свойство 1 определителей гласит: $|A^T| = |A|$. Подставляя полученное равенство в предыдущее, получаем: $|A|^2 = 1$. Отсюда следует, что либо $|A| = 1$, либо $|A| = -1$.

□

Числовая иллюстрация. Ортогональной матрицей является, например, матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

□

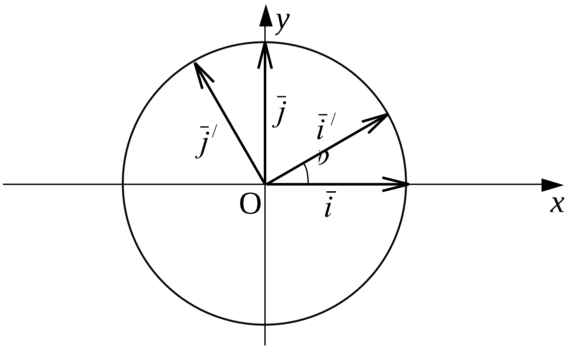
<u>*Теорема 12.*</u> 1) Пусть в соотношении (19) базисы $\left(\bar{a}^{(1)},\bar{a}^{(2)},...,\bar{a}^{(n)}\right)$ и $\left(\bar{a}^{(1)'},\bar{a}^{(2)'},...,\bar{a}^{(n)'}\right)$ – ортонормированные. Тогда матрица S перехода от первого базиса ко второму ортогональна.

2) Если в соотношении (19) старый базис $\left(\bar{a}^{(1)},\bar{a}^{(2)},...,\bar{a}^{(n)}\right)$ ортонормированный, а матрица перехода S ортогональна, то новый базис $\left(\bar{a}^{(1)'},\bar{a}^{(2)'},...,\bar{a}^{(n)'}\right)$ также ортонормированный.

<u>*Доказательство*</u> опускается.

□

<u>*Пример 15.*</u> Пусть $\left(\bar{i},\bar{j}\right)$ – естественный базис в R^2, а $\left(\bar{i}',\bar{j}'\right)$ – его поворот на угол φ против часовой стрелки. Представим вектора $\bar{i}'$ и $\bar{j}'$ в виде линейных комбинаций векторов исходного базиса $\left(\bar{i},\bar{j}\right)$. Имеем:



$$\bar{i}' = \cos\varphi\cdot\bar{i} + \sin\varphi\cdot\bar{j},$$

$$\bar{j}' = \cos\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\bar{i} + \sin\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\bar{j} =$$

$$= -\sin\varphi\cdot\bar{i} + \cos\varphi\cdot\bar{j}.$$

Согласно формуле (18), элементы матрицы перехода от старого базиса к новому имеют вид: $s_{11} = \cos\varphi,\ s_{21} = \sin\varphi,\ s_{12} = -\sin\varphi,\ s_{22} = \cos\varphi.$ Таким образом, матрица перехода от базиса $\left(\bar{i},\bar{j}\right)$ к базису $\left(\bar{i}',\bar{j}'\right)$ вычисляется по формуле:

$$S = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}. \qquad (28)$$

Так как и старый, и новый базисы – ортонормированные, то по теореме 12 матрица S – ортогональная (этот факт легко следует также из теоремы 9). Поэтому

$$S^{-1} = S^T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \qquad (29)$$

и выражение новых координат какого-либо вектора через старые по теореме 6 имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = S^{-1}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \qquad (30)$$

Старые координаты выражаются через новые следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S\cdot\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}. \qquad (31)$$

□

Заметим, что матрица поворота ортонормированного базиса в R^3 имеет значительно более сложный вид, использующий так называемые углы Эйлера.

ЧАСТЬ 2: ВЕКТОРЫ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

Лекция 8

Замена базиса и скалярное произведение векторов

Напомним (см. пример 9), что если в пространстве R^n зафиксирован естественный базис $\left(\bar e^{(1)},\bar e^{(2)},...,\bar e^{(n)}\right)$, то для любых векторов $\bar a,\bar b\in R^n$ справедливы соотношения:

$$\bar a=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\...\\a_n\end{pmatrix}=a_1\bar e^{(1)}+a_2\bar e^{(2)}+...+a_n\bar e^{(n)},\quad \bar b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\...\\b_n\end{pmatrix}=b_1\bar e^{(1)}+b_2\bar e^{(2)}+...+b_n\bar e^{(n)}. \tag{32}$$

Введем в рассмотрение новый ортонормированный базис $\left(\bar e^{(1)'},\bar e^{(2)'},...,\bar e^{(n)'}\right)$. В соответствии с формулой (19) имеем: $\left(\bar e^{(1)'},\bar e^{(2)'},...,\bar e^{(n)'}\right)=\left(\bar e^{(1)},\bar e^{(2)},...,\bar e^{(n)}\right)\cdot S$, причем по теореме 12 матрица S ортогональна. Разлагая векторы $\bar a$ и $\bar b$ относительно нового базиса, получаем точно так же, как в (21):

$$\bar a=a_1'\bar e^{(1)'}+a_2'\bar e^{(2)'}+...+a_n'\bar e^{(n)'}=\sum_{k=1}^n a_k'\bar e^{(k)'},\qquad \bar b=b_1'\bar e^{(1)'}+b_2'\bar e^{(2)'}+...+b_n'\bar e^{(n)'}=\sum_{i=1}^n b_i'\bar e^{(i)'}. \tag{33}$$

Применяя равенства (33) и свойства скалярного произведения векторов, получаем:

$$\bar a\cdot\bar b=\left(\sum_{k=1}^n a_k'\bar e^{(k)'}\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^n b_i'\bar e^{(i)'}\right)=\sum_{k,i=1}^n a_k'b_i'\bar e^{(k)'}\cdot\bar e^{(i)'}.$$

В силу ортонормируемости базиса $\left(\bar e^{(1)'},\bar e^{(2)'},...,\bar e^{(n)'}\right)$ (см. определение 22) получаем, что при $k=i$ $\bar e^{(k)'}\cdot\bar e^{(i)'}=\bar e^{(k)'}\cdot\bar e^{(k)'}=1$, а при $k\ne i$ $\bar e^{(k)'}\cdot\bar e^{(i)'}=0$. Поэтому

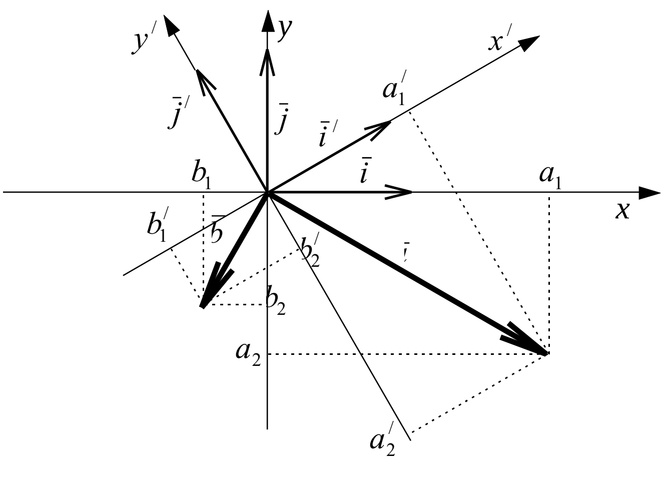
$$\bar a\cdot\bar b=\sum_{k=1}^n a_k'b_k'=a_1'b_1'+a_2'b_2'+...+a_n'b_n'.$$

Вспоминая определение 17 скалярного произведения векторов, делаем заключение, что мы доказали следующую теорему:

<u>*Теорема 13.*</u> При замене ортонормированного базиса на какой-либо другой ортонормированный базис скалярное произведение векторов не изменяет своего значения.

□

Проиллюстрируем доказанную теорему следующим рисунком:



$$\boxed{a_1b_1+a_2b_2=a_1'b_1'+a_2'b_2'}$$

Так как в силу определения 18 норма вектора и угол между векторами выражаются через скалярное произведение векторов, то и норма, и угол не изменяются при замене исходного ортонормированного базиса на новый ортонормированный базис. То же касается и проекции вектора на вектор (см. определение 19).

Векторное произведение векторов в R^3

<u>*Определение 24.*</u> Векторным произведением векторов $\bar{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ и $\bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ называется вектор, обозначаемый $\bar{a} \times \bar{b}$ и вычисляемый по формуле:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & a_1 & b_1 \\ \bar{j} & a_2 & b_2 \\ \bar{k} & a_3 & b_3 \end{vmatrix}. \qquad (34)$$

□

Заметим, что в первом столбце определителя, входящего в равенство (34), стоят не числа, а векторы. Однако и определение определителя, и его основные свойства сохраняются. Например, из свойства 1 теории определителей вытекает, что

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \qquad (35)$$

В таком виде формула для вычисления векторного произведения часто встречается в литературе. Если применять формулу (34), то определитель следует раскладывать по первому столбцу, а в случае (35) лучше применять разложение по первой строке.

<u>*Числовая иллюстрация.*</u> Пусть $\bar{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Используя (34), имеем:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & 5 & 4 \\ \bar{j} & -3 & 3 \\ \bar{k} & 2 & -1 \end{vmatrix} = \bar{i} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - \bar{j} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \bar{k} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = -3\bar{i} + 13\bar{j} + 27\bar{k} = \begin{pmatrix} -3 \\ 13 \\ 27 \end{pmatrix}.$$

□

Свойства векторного произведения

1. $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$ (антикоммутативность);
2. $\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}$ (дистрибутивность);
3. $\alpha(\bar{a} \times \bar{b}) = (\alpha\bar{a}) \times \bar{b} = \bar{a} \times (\alpha\bar{b})$ (ассоциативность по отношению к умножению на число);
4. $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{o}$ тогда и только тогда, когда векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ линейно зависимы.

<u>*Доказательство.*</u> Антикоммутативность вытекает из свойства 2 определителей, примененного к столбцам, а дистрибутивность и ассоциативность – соответственно из свойств 5 и 4 теории определителей. Докажем последнее предложение.

Если $\bar{a}$ и $\bar{b}$ линейно зависимы, то по свойству 1 систем векторов один из этих векторов выражается через другой, умноженный на число. Пусть, например, $\bar{b} = \alpha\bar{a}$. Тогда, применяя последовательно свойства 4 и 3 теории определителей, получаем:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & a_1 & b_1 \\ \bar{j} & a_2 & b_2 \\ \bar{k} & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{i} & a_1 & \alpha a_1 \\ \bar{j} & a_2 & \alpha a_2 \\ \bar{k} & a_3 & \alpha a_3 \end{vmatrix} = \alpha \cdot \begin{vmatrix} \bar{i} & a_1 & a_1 \\ \bar{j} & a_2 & a_2 \\ \bar{k} & a_3 & a_3 \end{vmatrix} = \bar{o}.$$

Обратное утверждение можно получить из результатов теоремы 15.

□

Заметим, что из формулы (34) непосредственно следует правило векторного умножения базисных векторов $\bar{i}$, $\bar{j}$ и $\bar{k}$: $\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}$, $\bar{j} \times \bar{k} = \bar{i}$, $\bar{k} \times \bar{i} = \bar{j}$. Если мы заменим базис $\left(\bar{i},\,\bar{j},\,\bar{k}\right)$ новым ортонормированным базисом $\left(\bar{i}^{\,/},\,\bar{j}^{\,/},\,\bar{k}^{\,/}\right)$, то можно доказать следующую лемму:

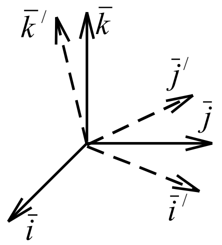
<u>*Лемма 5.*</u> Если S – матрица перехода от базиса $\left(\bar{i},\,\bar{j},\,\bar{k}\right)$ к базису $\left(\bar{i}^{\,/},\,\bar{j}^{\,/},\,\bar{k}^{\,/}\right)$, то

$$\bar{i}^{\,/}\times\bar{j}^{\,/}=\frac{1}{|S|}\cdot\bar{k}^{\,/},\qquad \bar{j}^{\,/}\times\bar{k}^{\,/}=\frac{1}{|S|}\cdot\bar{i}^{\,/},\qquad \bar{k}^{\,/}\times\bar{i}^{\,/}=\frac{1}{|S|}\cdot\bar{j}^{\,/}. \tag{36}$$

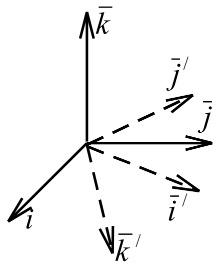
<u>*Доказательство*</u> проводится прямым вычислением по формуле (34) с использованием соотношений, следующих из равенства $S^{-1}=S^{T}$, где S^{-1} вычисляется по формуле (12). Рекомендуем читателю проделать необходимые выкладки.

□

Применяя теорему 11, мы видим, что для нашей ортогональной матрицы S возможны два варианта: либо $|S|=1$, либо $|S|=-1$. Можно доказать, что первый случай соответствует возможности повернуть базисную тройку $\left(\bar{i},\,\bar{j},\,\bar{k}\right)$ вокруг точки приложения этих векторов до совпадения с тройкой $\left(\bar{i}^{\,/},\,\bar{j}^{\,/},\,\bar{k}^{\,/}\right)$. Из рисунка ясно: вращая тройку $\left(\bar{i},\,\bar{j},\,\bar{k}\right)$



вокруг точки приложения векторов и совместив при этом вектор $\bar{i}$ с вектором $\bar{i}^{\,/}$, а вектор $\bar{j}$ с вектором $\bar{j}^{\,/}$, получим, что вектор $\bar{k}$ совместится с вектором $\bar{k}^{\,/}$. В двумерном случае поворот базиса $\left(\bar{i},\,\bar{j}\right)$ был изучен в примере 15. Из полученной там формулы (28) следовало, что $|S|=1$. Вариант $|S|=-1$ соответствует случаю, когда с помощью поворота тройку векторов $\left(\bar{i},\,\bar{j},\,\bar{k}\right)$ нельзя совместить с новой тройкой $\left(\bar{i}^{\,/},\,\bar{j}^{\,/},\,\bar{k}^{\,/}\right)$ (см. рисунок ниже).



В соответствии с вышесказанным естественно ввести следующее

<u>*Определение 25.*</u> Ортогональная матрица S называется матрицей поворота ортонормированного базиса, если $|S|=1$.

<u>*Теорема 14.*</u> Пусть вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ те же, что и в определении 24, и пусть их разложения относительно нового базиса $\left(\bar{i}^{\,/},\,\bar{j}^{\,/},\,\bar{k}^{\,/}\right)$ имеют вид: $\bar{a}=a_1^{/}\bar{i}^{\,/}+a_2^{/}\bar{j}^{\,/}+a_3^{/}\bar{k}^{\,/}$ и $\bar{b}=b_1^{/}\bar{i}^{\,/}+b_2^{/}\bar{j}^{\,/}+b_3^{/}\bar{k}^{\,/}$. Тогда

$$\bar{a}\times\bar{b}=\frac{1}{|S|}\cdot\begin{vmatrix}\bar{i}^{\,/} & a_1^{/} & b_1^{/}\\ \bar{j}^{\,/} & a_2^{/} & b_2^{/}\\ \bar{k}^{\,/} & a_3^{/} & b_3^{/}\end{vmatrix}.$$

В частности, если S – матрица поворота, то векторное произведение, вычисленное в координатах относительно естественного базиса (см. определение 24) совпадает с векторным произведением тех же векторов, вычисленным относительно нового базиса:

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i}^{\,/} & a_1^{/} & b_1^{/}\\ \bar{j}^{\,/} & a_2^{/} & b_2^{/}\\ \bar{k}^{\,/} & a_3^{/} & b_3^{/}\end{vmatrix}. \tag{37}$$

<u>*Доказательство.*</u> Используя свойства векторного произведения, имеем:

$$\bar{a}\times\bar{b}=\left(a_1^{/}\bar{i}^{\,/}+a_2^{/}\bar{j}^{\,/}+a_3^{/}\bar{k}^{\,/}\right)\times\left(b_1^{/}\bar{i}^{\,/}+b_2^{/}\bar{j}^{\,/}+b_3^{/}\bar{k}^{\,/}\right)=a_1^{/}b_1^{/}\left(\bar{i}^{\,/}\times\bar{i}^{\,/}\right)+a_1^{/}b_2^{/}\left(\bar{i}^{\,/}\times\bar{j}^{\,/}\right)+$$
$$+a_1^{/}b_3^{/}\left(\bar{i}^{\,/}\times\bar{k}^{\,/}\right)+a_2^{/}b_1^{/}\left(\bar{j}^{\,/}\times\bar{i}^{\,/}\right)+a_2^{/}b_2^{/}\left(\bar{j}^{\,/}\times\bar{j}^{\,/}\right)+a_2^{/}b_3^{/}\left(\bar{j}^{\,/}\times\bar{k}^{\,/}\right)+a_3^{/}b_1^{/}\left(\bar{k}^{\,/}\times\bar{i}^{\,/}\right)+a_3^{/}b_2^{/}\left(\bar{k}^{\,/}\times\bar{j}^{\,/}\right)+$$
$$+a_3^{/}b_3^{/}\left(\bar{k}^{\,/}\times\bar{k}^{\,/}\right)=\left(a_1^{/}b_2^{/}-a_2^{/}b_1^{/}\right)\left(\bar{i}^{\,/}\times\bar{j}^{\,/}\right)-\left(a_1^{/}b_3^{/}-a_3^{/}b_1^{/}\right)\left(\bar{k}^{\,/}\times\bar{i}^{\,/}\right)+\left(a_2^{/}b_3^{/}-a_3^{/}b_2^{/}\right)\left(\bar{j}^{\,/}\times\bar{k}^{\,/}\right).$$

Применяя теперь равенства (36), получаем:

$$\bar{a}\times\bar{b}=\frac{1}{|S|}\cdot\left[\left(a_1'b_2'-a_2'b_1'\right)\bar{k}'-\left(a_1'b_3'-a_3'b_1'\right)\bar{j}'+\left(a_2'b_3'-a_3'b_2'\right)\bar{i}'\right]=\frac{1}{|S|}\cdot\begin{vmatrix}\bar{i}' & a_1' & b_1'\\ \bar{j}' & a_2' & b_2'\\ \bar{k}' & a_3' & b_3'\end{vmatrix}.$$

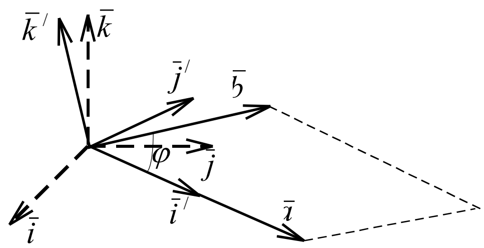
□

Следующая теорема проясняет геометрический смысл векторного произведения.

<u>*Теорема 15.*</u> Векторное произведение $\bar{a}\times\bar{b}$ есть вектор, удовлетворяющий следующим условиям:

1) норма этого вектора равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ как на сторонах;
2) вектор $\bar{a}\times\bar{b}$ ортогонален и вектору $\bar{a}$, и вектору $\bar{b}$;
3) направление вектора $\bar{a}\times\bar{b}$ определяется по правилу буравчика: если лезвие буравчика установить перпендикулярно плоскости, в которой лежат вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$, а ручку буравчика вращать от вектора $\bar{a}$ к вектору $\bar{b}$ в сторону наименьшего угла между этими векторами, то направление вектора $\bar{a}\times\bar{b}$ совпадет с направлением движения лезвия буравчика.

<u>*Доказательство.*</u> Вместо естественного базиса $\left(\bar{i},\bar{j},\bar{k}\right)$ построим новый ортонормированный базис $\left(\bar{i}',\bar{j}',\bar{k}'\right)$ так, как показано на рисунке. Именно, приведем все



векторы к одному началу, направим вектор $\bar{i}'$ по вектору $\bar{a}$, вектор $\bar{j}'$ расположим на плоскости, содержащей вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$, а вектор $\bar{k}'$ направим с таким расчетом, чтобы тройка $\left(\bar{i}',\bar{j}',\bar{k}'\right)$ получалась поворотом тройки $\left(\bar{i},\bar{j},\bar{k}\right)$. Тогда $\bar{a}=\|\bar{a}\|\cdot\bar{i}'$, $\bar{b}=\|\bar{b}\|\cos\varphi\cdot\bar{i}'+$ $+\|\bar{b}\|\sin\varphi\cdot\bar{j}'$. По построению базиса $\left(\bar{i}',\bar{j}',\bar{k}'\right)$ получаем $|S|=1$. По формуле (37):

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i}' & \|\bar{a}\| & \|\bar{b}\|\cos\varphi\\ \bar{j}' & 0 & \|\bar{b}\|\sin\varphi\\ \bar{k}' & 0 & 0\end{vmatrix}=\|\bar{a}\|\cdot\|\bar{b}\|\cdot\sin\varphi\cdot\bar{k}'. \tag{38}$$

Ясно, что $\|\bar{a}\times\bar{b}\|=\|\bar{a}\|\cdot\|\bar{b}\|\cdot\sin\varphi=S_{пар.}$, где последнее равенство – это элементарная геометрическая формула для вычисления площади параллелограмма, натянутого на вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Так как $\bar{k}'$ ортогонален $\bar{i}'$ и $\bar{j}'$, то по построению $\bar{k}'$ ортогонален векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$ и, следовательно, $\bar{a}\times\bar{b}$ ортогонален векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Поскольку направление вектора $\bar{k}=\bar{i}\times\bar{j}$, очевидно, определяется по векторам $\bar{i}$ и $\bar{j}$ с помощью правила буравчика, а тройка $\left(\bar{i}',\bar{j}',\bar{k}'\right)$ получилась из тройки $\left(\bar{i},\bar{j},\bar{k}\right)$ поворотом, то и направление вектора $\bar{k}'=\bar{i}'\times\bar{j}'$ (см. лемму 5) определяется по векторам $\bar{i}'$ и $\bar{j}'$ с помощью правила буравчика. Вид коэффициента при $\bar{k}'$ в формуле (38) говорит о том, что и $\bar{a}\times\bar{b}$ определяется по векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$ с помощью правила буравчика. □

ЧАСТЬ 2: ВЕКТОРЫ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

Лекция 9

Продолжим изучение векторного произведения векторов, заметив, что на практике чаще всего применяются два результата из теоремы 15:

1) если даны векторы $\bar{a},\bar{b}\in R^3$, то площадь параллелограмма (соответственно, площадь треугольника), натянутого на эти вектора, следует вычислять по формуле: $S_{пар.}=\|\bar{a}\times\bar{b}\|$ (соотв., $S_\Delta=\frac{1}{2}\cdot\|\bar{a}\times\bar{b}\|$);

2) если даны два линейно независимых вектора $\bar{a},\bar{b}\in R^3$ и требуется найти какой-либо вектор $\bar{c}$, ортогональный этим векторам, то следует положить: $\bar{c}=\bar{a}\times\bar{b}$.

<u>Пример 16.</u> Пусть дана пирамида, вершины которой имеют те же координаты, что и в примере 12 (см. также рисунок из этого примера). Требуется найти $S_{\Delta ABC}$ и $S_{\Delta BCD}$.

Положим $\bar{a}=\overline{AB},\ \bar{b}=\overline{AC}$. Вычисляем векторное произведение:

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & 5 & 2\\ \bar{j} & 2 & 5\\ \bar{k} & 0 & 0\end{vmatrix}=21\bar{k}\ \Rightarrow\ S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot\|\bar{a}\times\bar{b}\|=\frac{1}{2}\cdot\|21\bar{k}\|=\frac{21}{2}\cdot\|\bar{k}\|=10{,}5.$$

Аналогично, полагая $\bar{c}=\overline{CB}=\begin{pmatrix}3\\-3\\0\end{pmatrix},\ \bar{d}=\overline{CD}=\begin{pmatrix}-1\\-3\\4\end{pmatrix}$, получаем:

$$\bar{c}\times\bar{d}=\begin{vmatrix}\bar{i} & 3 & -1\\ \bar{j} & -3 & -3\\ \bar{k} & 0 & 4\end{vmatrix}=-12\bar{i}-12\bar{j}-12\bar{k}=\begin{pmatrix}-12\\-12\\-12\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ S_{\Delta BCD}=\frac{1}{2}\cdot\|\bar{c}\times\bar{d}\|=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(-12)^2+(-12)^2+(-12)^2}=6\sqrt{3}.$$

□

Смешанное произведение векторов в R^3

<u>Определение 26.</u> Смешанным произведением трех векторов $\bar{a},\bar{b},\bar{c}\in R^3$ называется число, обозначаемое $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ и вычисляемое по формуле:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c}=\bar{a}\cdot\left(\bar{b}\times\bar{c}\right). \tag{39}$$

□

Заметим, что при применении формулы (39) сначала нужно вычислить векторное произведение векторов, стоящее в круглых скобках, а затем результат скалярно умножить на вектор $\bar{a}$.

<u>Теорема 16.</u> Если $\bar{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\bar{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix},\bar{c}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$, то смешанное произведение этих векторов вычисляется по формуле:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \qquad (40)$$

<u>*Доказательство.*</u> Используя определения 26 и 24, получаем:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c}=\bar{a}\cdot\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)=\bar{a}\cdot\begin{vmatrix} \bar{i} & b_1 & c_1 \\ \bar{j} & b_2 & c_2 \\ \bar{k} & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\bar{a}\cdot\left(\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}\cdot\bar{i}-\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}\cdot\bar{j}+\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}\cdot\bar{k}\right)=$$

$$=a_1\cdot\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-a_2\cdot\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}+a_3\cdot\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

□

<u>*Числовая иллюстрация.*</u> Пусть $\bar{a}=\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\bar{b}=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$, $\bar{c}=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$. Найдем $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$, используя формулу (40):

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c}=\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=-3.$$

□

Свойства смешанного произведения векторов

1. $\bar{a}\cdot\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)=\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}$;
2. Если в смешанном произведении поменять местами два любых сомножителя, то смешанное произведение изменит знак (например, $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=-\bar{b}\bar{a}\bar{c}$);
3. Смешанное произведение дистрибутивно по каждому переменному (например, $\bar{a}\bar{b}\left(\bar{c}+\bar{d}\right)=\bar{a}\bar{b}\bar{c}+\bar{a}\bar{b}\bar{d}$);
4. $\alpha\left(\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right)=\left(\alpha\bar{a}\right)\bar{b}\bar{c}=\bar{a}\left(\alpha\bar{b}\right)\bar{c}=\bar{a}\bar{b}\left(\alpha\bar{c}\right)$ (ассоциативность по отношению к умножению на число);
5. $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=0$ тогда и только тогда, когда векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ линейно зависимы.

<u>*Доказательство.*</u> Первые четыре свойства являются непосредственными следствиями свойств определителей, а пятое следует из свойства 5 систем векторов.

□

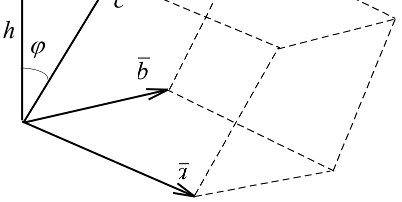
Выясним теперь геометрический смысл смешанного произведения.

<u>*Теорема 17.*</u> Модуль смешанного произведения векторов $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах как на сторонах.

<u>*Доказательство.*</u> Свойство 1 в сочетании с формулой (25) дает:

$$\left|\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right|=\left|\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}\right|=\left\|\bar{a}\times\bar{b}\right\|\cdot\left\|\bar{c}\right\|\cdot\left|\cos\varphi\right|, \qquad (41)$$

где φ – угол между векторами $\bar{a}\times\bar{b}$ и $\bar{c}$ (см. рисунок). По теореме 15 площадь основания построенного параллелепипеда равна $\left\|\bar{a}\times\bar{b}\right\|$, а произведение $\left\|\bar{c}\right\|\cdot\left|\cos\varphi\right|$ совпадает с высотой *h* параллелепипеда (модуль косинуса играет свою роль, когда $\varphi>\frac{\pi}{2}$). Поэтому правая часть формулы (41) равна объему построенного параллелепипеда.



□

<u>*Числовая иллюстрация.*</u> Пусть вектора $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$ те же, что и в предыдущей числовой иллюстрации. Найдем объем V параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$ как на сторонах.

Воспользовавшись теоремой 17 и вычислениями из предыдущей числовой иллюстрации, получаем: $V = |\bar{a}\bar{b}\bar{c}| = |-3| = 3.$

□

<u>*Пример 17.*</u> Пусть дана пирамида из примеров 12 и 15. Найти объем V этой пирамиды, а также ее высоту h, опущенную из вершины D на основание ABC.

Так как $\bar{a} = \overline{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \overline{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\bar{c} = \overline{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, а объем пирамиды (как это следует из элементарных геометрических соображений) в шесть раз меньше объема соответствующего параллелепипеда, то

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 100 - 16 = 84,$$

и по теореме 17 $V = \dfrac{1}{6}|\bar{a}\bar{b}\bar{c}| = \dfrac{84}{6} = 14.$ Далее, поскольку $V = \dfrac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot h$, то, применяя результат вычисления $S_{\Delta ABC}$ из примера 16, получаем: $h = \dfrac{3V}{S_{\Delta ABC}} = \dfrac{42}{10{,}5} = 4.$

□

Изучим теперь, как изменяется смешанное произведение векторов при переходе от естественного базиса к новому ортонормированному базису $\left(\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'\right)$.

<u>*Теорема 18.*</u> Пусть вектора $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$ те же, что и в условии теоремы 16, и пусть их разложения относительно нового базиса $\left(\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'\right)$ имеют вид: $\bar{a} = a_1'\bar{i}' + a_2'\bar{j}' + a_3'\bar{k}'$, $\bar{b} = b_1'\bar{i}' + b_2'\bar{j}' + b_3'\bar{k}'$ и $\bar{c} = c_1'\bar{i}' + c_2'\bar{i}' + c_3'\bar{i}'$. Тогда

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \frac{1}{|S|} \cdot \begin{vmatrix} a_1' & b_1' & c_1' \\ a_2' & b_2' & c_2' \\ a_3' & b_3' & c_3' \end{vmatrix},$$

где S – матрица перехода от базиса $\left(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\right)$ к базису $\left(\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'\right)$.

<u>*Доказательство.*</u> Применяя формулу (39) и теорему 14, получаем:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \bar{a} \cdot \left(\bar{b} \times \bar{c}\right) = \left(a_1'\bar{i}' + a_2'\bar{j}' + a_3'\bar{k}'\right) \cdot \frac{1}{|S|} \cdot \begin{vmatrix} \bar{i}' & b_1' & c_1' \\ \bar{j}' & b_2' & c_2' \\ \bar{k}' & b_3' & c_3' \end{vmatrix} = \frac{1}{|S|} \cdot \left(a_1'\bar{i}' + a_2'\bar{j}' + a_3'\bar{k}'\right) \cdot$$

$$\cdot \left(\begin{vmatrix} b_2' & c_2' \\ b_3' & c_3' \end{vmatrix} \cdot \bar{i}' - \begin{vmatrix} b_1' & c_1' \\ b_3' & c_3' \end{vmatrix} \cdot \bar{j}' + \begin{vmatrix} b_1' & c_1' \\ b_2' & c_2' \end{vmatrix} \cdot \bar{k}' \right) = \frac{1}{|S|} \cdot \left(a_1' \begin{vmatrix} b_2' & c_2' \\ b_3' & c_3' \end{vmatrix} - a_2' \begin{vmatrix} b_1' & c_1' \\ b_3' & c_3' \end{vmatrix} + a_3' \begin{vmatrix} b_1' & c_1' \\ b_2' & c_2' \end{vmatrix} \right) =$$

$$= \frac{1}{|S|} \cdot \begin{vmatrix} a_1' & b_1' & c_1' \\ a_2' & b_2' & c_2' \\ a_3' & b_3' & c_3' \end{vmatrix}.$$

□

<u>*Следствие.*</u> Если S – матрица поворота, то смешанное произведение, вычисленное в координатах относительно естественного базиса совпадает со смешанным произведением тех же векторов, вычисленным относительно нового базиса.

□

Решим еще несколько дополнительных примеров, часто встречающихся на практике.

<u>*Пример 18.*</u> Показать, что точки $A(5,7,-2)$, $B(3,1,-1)$, $C(9,4,-4)$, $D(1,5,0)$ лежат в одной плоскости.

Вычислим векторы $\overline{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overline{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\overline{AD} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Данные точки лежат на одной плоскости тогда и только тогда, когда полученные векторы также лежат в одной плоскости (компланарны), то есть линейно зависимы. По свойству 5 смешанного произведения это возможно тогда и только тогда, когда $\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD} = 0$. Имеем:

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD} = \begin{vmatrix} -2 & 4 & -4 \\ -6 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} -6 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} -6 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 20 + 40 - 60 = 0,$$

следовательно точки $A,\ B,\ C,\ D$ лежат в одной плоскости.

□

<u>*Пример 19.*</u> Найти единичный вектор, ортогональный векторам $\overline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ и $\overline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

По теореме 15, вектор $\overline{c} = \overline{a} \times \overline{b}$ ортогонален данным векторам. Имеем:

$$\overline{c} = \begin{vmatrix} \overline{i} & 1 & 2 \\ \overline{j} & 1 & 1 \\ \overline{k} & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\overline{i} + 3\overline{j} - \overline{k} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Применяя нормировку (см. пример 14), получаем: $\overline{c}^{\,0} = \dfrac{\overline{c}}{\|\overline{c}\|} = \dfrac{\overline{c}}{\sqrt{11}} = \dfrac{1}{\sqrt{11}}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

□

<u>*Пример 20.*</u> Вычислить площадь ΔABC, где $A(2,1)$, $B(3,4)$, $C(7,6)$.

Погрузим координатную плоскость Oxy в пространство $Oxyz$. Тогда координаты вершин треугольника станут таковы: $A(2,1,0)$, $B(3,4,0)$, $C(7,6,0)$. Имеем:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot\left\|\overline{AB}\times\overline{AC}\right\| = \frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{vmatrix} \overline{i} & 1 & 5 \\ \overline{j} & 3 & 5 \\ \overline{k} & 0 & 0 \end{vmatrix}\right\| = \frac{1}{2}\cdot\left\|-10\overline{k}\right\| = 5.$$

□